OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2013

Clasa a V-a

Problema 1. a) Diferenţa a două numere este 714. Unul dintre numere este 2341. Calculaţi suma celor două numere. Câte soluţii are problema?
b) Produsul a două numere este 646. Mărind unul dintre numere cu 10, produsul devine 986. Aflaţi cele două numere.

Cătălin Mîinescu, Balş

Problema 2. Determinaţi numerele naturale nenule care împărţite la 6 dau câtul a şi restul b, iar împărţite la 11 dau câtul b şi restul a.

Valentin Rădulescu, Scorniceşti

Problema 3. Scriind primele 2013 numere naturale pare nenule, fără să le separăm, se formează un număr natural. Aflaţi a 2013-a cifră a acestui număr natural.

Bogdan Băbărelu, Crâmpoia

Problema 4. Un dreptunghi cu n linii şi m coloane este împărţit în pătrăţele 1×1. Pe prima linie colorăm primul pătrăţel, pe a doua linie colorăm primele doua pătrăţele, pe a treia linie primele patru pătrăţele, pe a patra linie primele opt pătrăţele ş.a.m.d., până când, pe a n-a linie se vor colora toate pătrăţelele. Știind că numărul total de pătrăţele colorate este 127, aflați câte linii şi câte coloane are dreptunghiul.

Mihaela Bucătaru

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 2 ore şi 30 de minute.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2013

Clasa a V-a

Problema 1. a) Diferenţa a două numere este 714. Unul dintre numere este 2341. Calculaţi suma celor două numere. Câte soluţii are problema?
b) Produsul a două numere este 646. Mărind unul dintre numere cu 10, produsul devine 986. Aflaţi cele două numere.

Cătălin Mîinescu, Balş

Problema 2. Determinaţi numerele naturale nenule care împărţite la 6 dau câtul a şi restul b, iar împărţite la 11 dau câtul b şi restul a.

Valentin Rădulescu, Scorniceşti

Problema 3. Scriind primele 2013 numere naturale pare nenule, fără să le separăm, se formează un număr natural. Aflaţi a 2013-a cifră a acestui număr natural.

Bogdan Băbărelu, Crâmpoia

Problema 4. Un dreptunghi cu n linii şi m coloane este împărţit în pătrăţele 1×1. Pe prima linie coloram primul pătrăţel, pe a doua linie coloram primele doua pătrăţele, pe a treia linie primele patru pătrăţele, pe a patra linie primele opt pătrăţele ş.a.m.d., până când, pe a n-a linie se vor colora toate pătrăţelele. Ştiind că numărul total de pătrăţele colorate este 127, aflaţi câte linii şi câte coloane are dreptunghiul.

Mihaela Bucătaru

Problema 1. **a)** Numărul 2341 poate fi atât descăzut, cât şi scăzător. Problema are două soluţii:
Dacă 2341 este descăzut, celălalt număr este 2341 – 714 = 1627 .... (2p)
Dacă 2341 este scăzător, celălalt număr este 2341 + 714 = 3055 .... (2p)
b) Fie a şi b cele două numere; atunci $a\cdot b=646$. Dacă a se măreşte cu 10, atunci:
$(a+10)\cdot b=986$, de unde rezultă că $ab+10b=986$ .... (1p)
Obţinem $10b=340$, de unde $b=34$ şi $a=19$ .... (2p)

Problema 2. Fie n un număr ca în enunţ; atunci avem relaţiile $\begin{cases} n=6a+b, & b<6 \\ n=11b+a, & a<11 \end{cases}$ .... (2p)
Din relaţiile de mai sus rezultă $6a+b=11b+a$, de unde $a=2b$ şi $n=13b$ .... (2p)
Cum $a,b\neq0$, avem $b\in\{1,2,3,4,5\}$, pentru care se observă că $a=2b<11$.
În concluzie, soluţiile problemei sunt 13, 26, 39, 52, 65 .... (3p)

Problema 3. Pentru scrierea numerelor de la 2 la 8 se folosesc 4 cifre. De la 10 la 98 sunt 45 de numere pare, pentru scrierea cărora se folosesc $2\cdot45=90$ cifre .... (1p)
Sunt 450 de numere pare de trei cifre, pentru scrierea lor fiind nevoie de 1350 cifre .... (2p)
Ca urmare, pentru a scrie toate numerele pare de la 2 la 998 este nevoie de 1350 + 90 + 4 = 1444 cifre.
Mai trebuie scrise numere de patru cifre pentru a acoperi restul de 2013 – 1444 = 569 cifre
Cum 569 : 4 = 142, rest 1, înseamnă că cifra căutată este prima cifră a celui de-al 143-lea număr par de patru cifre (pentru că trebuie scrise 142 de numere pare de patru cifre şi încă o cifră) .... (2p)
Al 143-lea număr par de patru cifre este $1000+2\cdot142=1284$, deci cifra căutată este 1 .... (2p)

Problema 4. Pe prima linie a dreptunghiului se colorează 1 (un) pătrăţel, pe a doua 2 pătrăţele, pe a treia 2^2, pe următoarea 2^3 şi aşa mai departe, pe ultima linie se colorează 2^{n-1} pătrăţele .... (2p)
Numărul total de pătrăţele colorate este $1+2^1+2^2+...+2^{n-1}=2^n-1$ (cu demonstraţie!) .... (3p)
Obţinem ca $2^n-1=127$, de unde $n=7$. Dreptunghiul are 7 linii şi $2^6=64$ coloane (numărul coloanelor este egal cu numărul de pătrăţele colorate ale ultimei linii) .... (2p)