



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Județeană și a Municipiului București, 19 martie 2016
CLASA a VIII-a

Problema 1. Arătați că într-o piramidă patrulateră regulată două fețe laterale opuse sunt perpendiculare dacă și numai dacă unghiul dintre două fețe laterale alăturate are măsura de 120° .

Gazeta Matematică

Problema 2. Pentru orice număr natural nenul n notăm cu x_n numărul numerelor naturale de n cifre, divizibile cu 4, formate cu cifrele 2, 0, 1 sau 6.

- Calculați x_1, x_2, x_3 și x_4 .
- Să se găsească numărul natural n astfel încât

$$1 + \left[\frac{x_2}{x_1} \right] + \left[\frac{x_3}{x_2} \right] + \left[\frac{x_4}{x_3} \right] + \dots + \left[\frac{x_{n+1}}{x_n} \right] = 2016,$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .

Problema 3. a) Demonstrați că pentru orice număr întreg k , ecuația $x^3 - 24x + k = 0$ are cel mult o soluție întreagă.

- Arătați că ecuația $x^3 + 24x - 2016 = 0$ are exact o soluție întreagă.

Problema 4. Fie $ABCD A' B' C' D'$ un paralelipiped dreptunghic și M respectiv N picioarele perpendicularelor duse din A' și C' pe BD . Lungimile muchiilor AB , BC și AA' sunt egale cu $\sqrt{6}$, $\sqrt{3}$ și respectiv $\sqrt{2}$.

- Demonstrați că $A'M \perp C'N$.
- Calculați măsura unghiului dintre planele $(A'MC)$ și (ANC') .

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Județeană și a Municipiului București, 19 martie 2016
CLASA a VIII-a

Problema 1. Arătați că într-o piramidă patrulateră regulată două fețe laterale opuse sunt perpendiculare dacă și numai dacă unghiul dintre două fețe laterale alăturate are măsura de 120° .

Gazeta Matematică

Soluție . Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu baza $ABCD$. Notăm cu a lungimea laturii AB . Fețele VAD și VBC sunt perpendiculare dacă și numai dacă triunghiul VMN este dreptunghic isoscel cu laturile $VM = VN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, unde M și N sunt mijloacele muchiilor AD respectiv BC 2 puncte.

Dacă P este piciorul perpendicularei din A pe VB (aceiași cu piciorul perpendicularei din C pe VB), atunci obținem echivalent $PC = PA = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ (evaluând aria triunghiului VBC în două moduri) 2 puncte

Aceasta este echivalent cu faptul că triunghiul isoscel ACP are măsura unghiului $\angle APC$ de 120° (folosind eventual o funcție trigonometrică) ... 2 puncte

Unghiul plan al diedrului căutat este $\angle APC$ 1p

Problema 2. Pentru orice oricare număr natural nenul n notăm cu x_n numărul numerelor naturale de n cifre, divizibile cu 4, formate cu cifrele 2, 0, 1 sau 6.

- Să se calculeze x_1, x_2, x_3 și x_4 .
- Să se găsească numărul natural n astfel încât

$$1 + \left\lfloor \frac{x_2}{x_1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x_3}{x_2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x_4}{x_3} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{x_{n+1}}{x_n} \right\rfloor = 2016,$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .

Soluție . a) $x_1 = 1$ (0 este divizibil cu 4), $x_2 = 4$ (numerele 12, 16, 20 și 60 sunt divizibile cu 4), $x_3 = 3 \cdot 5$, (pentru că prima cifră nu poate fi 0 iar ultimele două pot fi 12, 16, 20, 60 și 00), $x_4 = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ (pentru că prima cifră nu poate fi 0, pentru a 2-a avem 4 posibilități iar ultimele două pot fi

12, 16, 20, 60 și 00) 3 puncte.

b) Dacă $n \geq 3$, un număr A care verifică condițiile din enunț este de forma $A = \overline{a_1 a_2 \dots a_{n-2} p q}$ unde prima cifră poate lua 3 valori, fiecare dintre cifrele a_2, a_3, \dots, a_{n-2} poate fi aleasă în 4 moduri iar ultimele două pot fi 12, 16, 20, 60 și 00.

Rezultă că $x_n = 3 \cdot 4^{n-3} \cdot 5$ pentru orice $n \geq 3$ 2 puncte

Pentru orice $n \geq 3$, $\frac{x_{n+1}}{x_n} = 4$, de unde $1 + \left[\frac{x_2}{x_1}\right] + \left[\frac{x_3}{x_2}\right] + \left[\frac{x_4}{x_3}\right] + \dots + \left[\frac{x_{n+1}}{x_n}\right] = 1 + 4 + 3 + 4(n-2)$, $4n = 2016$, $n = 504$ 2 puncte .

Problema 3. a) Demonstrați că pentru orice număr întreg k , ecuația $x^3 - 24x + k = 0$ are cel mult o soluție întreagă.

b) Arătați că ecuația $x^3 + 24x - 2016 = 0$ are exact o soluție întreagă.

Soluție . a) Presupunem prin absurd că există două numere întregi diferite m și n astfel încât $m^3 - 24m + k = 0$ și $n^3 - 24n + k = 0$.

Prin scădere obținem $(m-n)(m^2 + mn + n^2 - 24) = 0$ 1 punct

$m^2 + mn + n^2 = 24$ (m și n sunt diferite) de unde $(2m+n)^2 + 3n^2 = 96$
1 punct

$n^2 \leq 32$, $n^2 \in \{0, 1, 4, 9, 16, 25\}$ 1 punct

$(2m+n)^2 \in \{96, 93, 84, 69, 48, 21\}$, contradicție 1 punct

b) $x(x^2 + 24) = 2016$ de unde x poate fi doar natural nenul. $x = 12$ verifică ecuația 1 punct

Dacă prin absurd există $x < y$ naturale care verifică ecuația atunci $x^2 + 24 < y^2 + 24$ 1 punct

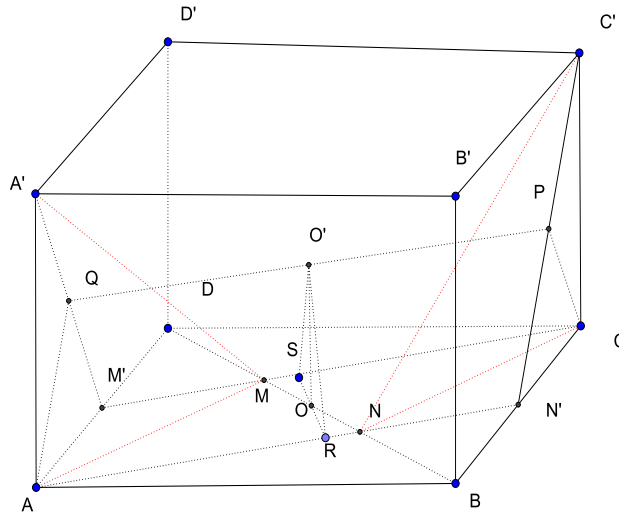
$2016 = x(x^2 + 24) < x(y^2 + 24) = 2016$ contradicție 1 punct

Problema 4. Fie $ABCD A' B' C' D'$ un paralelipiped dreptunghic și M respectiv N picioarele perpendicularelor duse din A' și C' pe BD . Lungimile muchiilor AB , BC și AA' sunt egale cu $\sqrt{6}$, $\sqrt{3}$ și respectiv $\sqrt{2}$.

a) Demonstrați că $A'M \perp C'N$.

b) Calculați măsura unghiului dintre planele $(A'MC)$ și (ANC') .

Soluție .



a) $AM \perp BD$, $AM = \sqrt{2}$ deci triunghiul $A'AM$ este isoscel. Analog
 triunghiul $C'CN$ 1 punct
 Rezultă $\angle A'MA = \angle C'NC = 45^\circ$, deci unghiul dintre dreptele $A'M$ și
 $C'N$ este de 90° 1 punct.

b) Fie $CM \cap AD = \{M'\}$, $AN \cap BC = \{N'\}$, P și Q mijloacele seg-
 mentelor $[N'C']$ respectiv $[A'M']$. $BD = 3$, $DM = MN = NB = 1$, $DM' =$
 $\frac{\sqrt{3}}{2}$. M' și N' sunt mijloacele muchiilor $[AD]$ respectiv $[BC]$. Intersecția
 planelor $(A'MC)$ și (ANC') este dreapta PQ 2 puncte

Fie O și O' mijloacele segmentelor $[BD]$ respectiv $[PQ]$ și $R \in AN$,
 $S \in CM$ intersecțiile perpendicularei din O pe AN (și pe CM). Unghiul
 planelor $(A'MC)$ și (ANC') este $\angle RO'S$ 1 punct

$CM' = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $RS = \frac{\sqrt{6}}{3}$ (se exprimă aria lui $AN'CM'$ în două moduri),
 $OO' = \frac{\sqrt{2}}{2}$ rezultă că triunghiul $RO'S$ este echilateral deci măsura unghiul
 căutat este de 60° 2 puncte.

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.