Inspectoratul Scolar Judetean Gorj

OLIMPIADA NATIONALA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, CLASA A- VI-A

15 februarie 2015

1.Se dă următorul șir de numere naturale scrise în ordine descrescătoare :
……,26,23,20,……
a) Aflați primii doi termeni ai șirului scris în ordine crescătoare ;
b) Aflați suma primilor 20 de termeni ai șirului ;
c) Demonstrați că nici un termen al șirului nu poate fi pătrat perfect .

2.Se considera ecuatia $xy^2+2xz^3=6y^2z^3$, unde x,y si z sunt numere naturale nenule .
a) Verificati daca tripletele (2,1,1) si $(2^8,2^4,2^2)$ sunt solutii ale ecuatiei date.
b) Aratati ca ecuatia data are o infinitate de solutii .

Gazeta Matematica

3.Se consideră semidreptele [OA,[OB,[OC,[OD și [OE în această ordine. Dacă $m(\sphericalangle BOC)+10^0=m(\sphericalangle AOB)$; $3\cdot m(\sphericalangle COD)=4\cdot m(\sphericalangle BOC)$; $m(\sphericalangle AOE)=2m(\sphericalangle DOE)$; $3\cdot m(\sphericalangle AOE)=5\cdot\ m(\sphericalangle BOC)$, atunci :
a) Aflați $m(\sphericalangle AOB), m(\sphericalangle BOC), m(\sphericalangle COD), m(\sphericalangle DOE)$ și $m(\sphericalangle EOA)$;
b) Dacă [OF este bisectoarea $\sphericalangle AOE$ arătați că punctele F , O și C sunt coliniare .

4.Se considera segmentul [AB]. Notam M mijlocul lui [AB] , M_1 mijlocul lui [BM], M_2 mijlocul lui [M_1A] , M_3 mijlocul lui [M_2B], M_4 mijlocul lui [AM_3]. Se stie ca $M_1M_3=M_2M_4+2$cm.

a) Aflati lungimea segmentului [AB].

b) Notam cu M_a si M_b mijloacele segmentelor [M_2M_4] si [M_1M_3]. Aratati ca M_a este mijlocul lui [AM_b].

Nota :Timp de lucru 2 ore .
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.

BAREME-SOLUTII-PROBLEME-OLIMPIADA DE MATEMATICA-
FAZA LOCALA-14 FEBRUARIE 2014

1.a)Se observa ca $26 = 3 \cdot 9 - 1\,; 23 = 3 \cdot 8 - 1\,;\ 20 = 3 \cdot 7 - 1$ si asa mai departe avem ca $2 = 3 \cdot 1 - 1$, deci primii doi termeni ai sirului sunt 2 si 5(=3$\cdot\ 2 - 1$)

2 puncte .

b) termenul 20 este 3$\cdot\ 20 - 1 = 59$

S=2+5+8+…+59=(2+59)X20:2=610

1 puncte.

c) orice termen al sirului este de forma 3n-1 . Daca ar fi patrat perfect atunci 3n-1=p^2 , deci 3n=p^2+1 . Daca p=3k atunci 3n=$(3k)^2$+1 ,deci M_3=M_3+1 fals , daca p=3k+1 atunci 3n=$(3k+1)^2$+1 ,deci M_3=M_3+2 fals ,daca p=3k+2 atunci 3n=$(3k+2)^2$+1 ,deci M_3=M_3 +5 fals ,in concluzie nici un termen al sirului nu poate fi patrat perfect .

4 puncte.

2.a) (2,1,1) solutie daca x=2,y=1 si z=1 care verifica ecuatia . 1 punct.

(2^8,2^4,2^2) solutie daca x=2^8,y=2^4 si z=2^2 verifica ecuatia ,

deci $2^8\cdot 2^8+2\cdot 2^8\cdot 2^6=6\cdot 2^8\cdot 2^6/:2^{15}$, avem atunci 2+1=3 (A) 2 puncte.

b)Notam x=2^a , y=2^b , z=2^c , avem 2^{a+2b} +2^{1+a+3c} =$3\cdot 2^{1+2b+3c}$,luam relatiile : 1+a+3c=a+2b+1 si a+2b=1+2b+3c , deducem a=1+3c si 3c=2b , b=3c/2. Luam c=2n, a=6n+1 si b=3n . Obtinem ca x=2^{6n+1} , y=2^{3n} si z=2^{2n} care verifica ecuatia data pentru orice n numar natural , deci avem o infinitate de solutii .

4 puncte.

3.a)$\frac{m(\measuredangle COD)}{4} = \frac{m(\measuredangle BOC)}{3} = k\ \rightarrow m(\measuredangle BOC) = 3k\ si\ m(\measuredangle COD) = 4k \rightarrow m(\measuredangle AOB) = 3k + 10^0. Din\ 3 \cdot m(\measuredangle AOE) = 5 \cdot m(\measuredangle BOC)\ avem\ ca\ m(\measuredangle AOE) = 5k\ si\ m(\measuredangle DOE) = \frac{5k}{2}\ , apoi\ din\ suma\ lor\ avem\ ca$ k=20 atunci m($\measuredangle AOB) = 70^0, m(\measuredangle BOC) = 60^0, m(\measuredangle COD) = 80^0, m(\measuredangle DOE) = 50^0,\ m(\measuredangle AOE = 100^0$.

5 puncte.

b)[OF bis. Atunci $m(\measuredangle AOF) = 50^0, m(\measuredangle AOC) = 70^0 + 60^0 = 130^0$ si $m(\measuredangle FOC) = 180^0$. Atunci F,O,C coliniare .

2 puncte.

4.Notam AB=x , AM=BM=x/2 , MM_1=M_1B=x/4 , AM_1=x/2+x/4=3x/4 , AM_2=M_2M_1=3x/8 , AM_3=3x/8+x/8+3x/16=11x/16 , AM_4=11x/32=M_4M_3 , M_2M=3x/8-x/4=x/8 , M_2B=x/8+x/2=5x/8 , M_2M_3=M_3B=5x/16 , M_3M_1=5x/16-x/4=x/16 . (5x/16>x/8 , 5x/16<3x/8) , MM_3=x/4-x/16=3x/16 .

3 puncte.

a)Avem atunci x/16=x/32+2 , deducem x=64 , AB=64 cm.

1 punct

b)M_2M_a=M_aM_4=x/64 , M_1M_b=M_bM_3=x/32 . AM_a=11x/32+x/64=23x/64 si M_aM_b=x/64+x/8+3x/16+x/32=(x+8x+12x+2x)/64=23x/64 , deci M_a este mijlocul lui [AM_b]

3 puncte.