INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN V A S L U I

TELEFON: 0235/311928 , FAX: 0235/311715

e-mail: isjvaslui@isj.vs.edu.ro

website : http://isj.vs.edu.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI CERCETĂRII TINERETULUI ŞI SPORTULUI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ etapa locală

9.02.2013-clasa a X-a

1.a) Se dă funcția $f:R\to R, f(x)=12^x-4.3^x-9.4^x+37$. Este funcția f injectivă?

b) Fie funcția $f:(0,\infty)\to R$, astfel încât:

i) $f(xy)=f(x)+f(y), \forall x,y>0$

ii) $f(x)\in R^*, \forall x\in(0,\infty)-\{1\}$.

Să se arate că f este injectivă.

2. Considerăm numerele reale $a,b,x_1,x_2,...,x_n\in(0,1)$ astfel încât $b^n\le x_1.x_2...x_n.$

Să se arate că $(\log_a b)^n\ge \log_a x_1.\log_a x_2...\log_a x_n.$ (G.M.11/2012)

3. Se consideră $x=4^{\frac{2013}{n}+1}-5.2^{\frac{2013}{n}}+1$ cu $n\in N$ și $n\geq 2$. Dacă y este numitorul fracției care se obține după raționalizarea fracției $\frac{1}{x}$, atunci să se arate că y este divizibil cu 7.

4. Fie numerele complexe distincte a, b, c astfel încât $(a+b)^3=(b+c)^3=(c+a)^3$.

Să se arate că $a^3=b^3=c^3$.

(G.M. nr.9/2012)

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect rezolvat corect se notează cu 7 puncte.

BAREM DE NOTARE

Soluție 1.a) Funcția f se poate scrie succesiv:

$f(x)=12^x-4.3^x-9.4^x+37=4^x.3^x-4.3^x-9.4^x+36+1=$

$3^x(4^x-4)-9(4^x-4)+1=(3^x-9)(4^x-4)+1$ ....$(1{,}5p)$

Se observă că $f(1)=f(2)$ cu $1\neq 2$, deci funcția f nu este injectivă.........(0,5p)

Soluți 1.b) Pentru $x=y=1$ obținem $f(1)=f(1)+f(1)$ adică $f(1)=0$ .... (0.5p)

Apoi trecând pe y în $\frac{1}{x}$ avem că $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$ .... (1 p)

Fie $f(x)=f(y)$ cu $x,y\in(0,\infty)$ oarecare.

Dacă $y\rightarrow\frac{1}{y}$ rezultă $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$ ....(1 p)

De aici obținem că $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)=0$ ....(1 p)

Dar $f(x)\in R^*, \forall x>0$ și $x\neq 1$ și $f(1)=0$

Cum $f\left(\frac{x}{y}\right)=0$ obținem că $\frac{x}{y}=1$ adică $x=y$ și deci funcția f este injectivă.....(1,5p)

Soluție2. Aplicăm în ambii membrii ai inegalității $b^n \le x_1.x_2...x_{n.}$ logaritmul în baza a şi ținem seama că $a \in (0,1)$ ….(**1p**)

şi obținem: $\log_a b^n \ge \log_a (x_1.x_2...x_n) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + ... + \log_a x_{n.}$ **(1p)** $\Leftrightarrow$

$n \log_a b \ge \log_a x_1 + \log_a x_2 + ... + \log_a x_{n.}$

$\Leftrightarrow \log_a b \ge \dfrac{\log_a x_1 + \log_a x_2 + ... + \log_a x_n}{n} \ge \sqrt[n]{\log_a x_1 . \log_a x_2 ... \log_a x_n}$ **(3p)** de unde, prin ridicare la puterea a n-a a ambilor membrii ai inegalitții anterioare se obține relația care trebuia demonstrată.**(1p)** Am aplicat inegalitatea mediilor posibilă, deoarece $\log_a x_i \succ 0, i \in \{1,2,...,n\}$.**(1p)**

Soluție 3.

$x = 4 \cdot \left(2^{\frac{2013}{n}}\right)^2 - 5 \cdot 2^{\frac{2013}{n}} + 1 = 4\left(\sqrt[n]{2^{2013}}\right)^2 - 5\sqrt[n]{2^{2013}} + 1$ ……………………………………… (1p)

Notăm $a = \sqrt[n]{2^{2013}}$ şi obţinem : $x = 4a^2 - 5a + 1 = (4a-1)(a-1)$ ……………………………….**(3p)**

După raţionalizare numitorul fracţiei devine $y = (4^n \cdot 2^{2013} - 1) \cdot (2^{2013} - 1)$ ………… ………(2p)

$2^{2013} - 1 = (2^3)^{671} - 1 = (M_7 + 1) - 1 = M_7 \Rightarrow y \vdots 7$ ……………………………………………………………..**(1p)**

Soluție 4.

$(a+b)^3 = (b+c)^3 \Rightarrow (a+b^2) + (a+b)(b+c) + (b+c)^2 = 0$ (1)…………………………………………………**(2 p)**

$(b+c)^3 = (c+a)^3 \Rightarrow (b+c)^2 + (b+c)(c+a) + (c+a)^2 = 0$ (2)…………………………………….....(2p)

Scăzând relaţiile **(1)** și **(2)** obţinem $a+b+c=0 \Rightarrow a+b=-c, a+c=-b$ şi $b+c=-a$................ (**2p**)

Avem $(a+b)^3=-c^3$, $(a+c)^3=-b^3$, $(b+c)^3=-a^3$ și $(a+b)^3=(b+c)^3=(c+a)^3 \Rightarrow$

$a^3=b^3=c^3$ ....**(1p)**

Orice altă soluție corectă se punctează cu 7p.