Universitatea Valahia din Târgovişte
Facultatea de Ştiinţe şi Arte

Inspectoratul Şcolar Judeţean Dâmboviţa
SSMR Filiala Dâmboviţa

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Locală Dâmboviţa - 21 Februarie 2016

CLASA A XI-A

Subiectul 1. Se consideră matricele:

$$A = \begin{pmatrix} 3 - \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & 3 + \cos 2\alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

unde $\alpha \in \mathbb{R}$. Demonstraţi că $A = B^{-1}CB$, apoi calculaţi A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

Subiectul 2. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit, pentru orice număr natural $n \geq 1$, prin relaţia:

$$x_n^3 + x_n = 2 - \frac{1}{n}.$$

Demonstraţi că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este monoton, mărginit, apoi aflaţi limita sa.

Subiectul 3. Fie $f, g, u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ funcţii continue, astfel încât pentru orice $x \in [a, b]$, $f(x) \leq u(x)$ şi $g(x) \geq v(x)$. În plus, $f(a) = u(a)$ şi $g(b) = v(b)$. Demonstraţi că există $c \in [a, b]$ astfel încât $f(c) + g(c) = u(c) + v(c)$.

Subiectul 4. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ două matrice astfel încât $(A - B)^2 = 0_2$.

a) Arătaţi că: $\det(A^2 - B^2) = (\det A - \det B)^2$.

b) Demonstraţi echivalenţa: $\det(AB - BA) = 0 \Leftrightarrow \det A = \det B$. **GM**

CLASA A XI-A - BAREM

SUBIECTUL 1

$A = B^{-1}CB$ (sau $BA = CB$, cu B inversabilă) (3 puncte)

$A^n = B^{-1}C^nB$ (2 puncte)

$$= \begin{pmatrix} 2^n + (4^n - 2^n)\sin^2\alpha & (4^n - 2^n)\sin\alpha\cos\alpha \\ (4^n - 2^n)\sin\alpha\cos\alpha & 2^n + (4^n - 2^n)\cos^2\alpha \end{pmatrix}$$ (2 puncte)

SUBIECTUL 2

(x_n) crescător (2 puncte), mărginit (2 puncte)

$l^3 + l = 2$ (1 punct)

de unde deduce $l = 1$ (2 puncte)

SUBIECTUL 3

$\varphi(x)=f(x)+g(x)-u(x)-v(x)$ este continuă (2 puncte)

$\varphi(a)=g(a)-v(a)\geq 0$ (2 puncte)

$\varphi(b)=f(b)-u(b)\leq 0$ (2 puncte)

Finalizare (1 punct)

SUBIECTUL 4

1 punct

Soluţie. Cum $(A-B)^2=O_2$ obţinem $\det(A-B)=0$ si $Tr(A-B)=0$.

2 puncte a) Fie $a=trA=trB$ si $b=\det A-\det B$. Din relaţia lui Cayley obţinem $\det\left(A^2-B^2\right)=\det\left(a(A-B)-bI_2\right)=\det\left(a(A-B)\right)-tr\left(a(A-B)\right)b+b^2=b^2$.

2 puncte b) Fie funcţia $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ dată de $f(x)=\det\left(A^2-B^2+x(AB-BA)\right)$. Avem $f(x)=\det\left(A^2-B^2\right)+cx+\det(AB-BA)x^2$.

Pe de altă parte, $f(1)=f(-1)=\det(A-B)\det(A+B)=0$, de unde reiese $c=0$ şi $\det\left(A^2-B^2\right)+\det(AB-BA)=0$. Folosind punctul anterior reiese cerinţa. 2 puncte