

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 9 februarie 2013

Clasa a XII-a

Subiectul I

Calculați $\int \frac{2x+3}{(x-3)(x-2)(x+7)(x+8)+a} dx$. Discuție după $a \in \mathbb{R}$.

Mihaly Bencze

Subiectul II

Arătați că șirul $(I_n)_{n \geq 0}$, I_n definit prin: $I_n = \int_0^1 \frac{nx^n}{x^n+1} dx$ este monoton și are limita $\ln 2$.

Gazeta Matematică

Subiectul III

Fie G un grup cu $2n$ elemente, $n \geq 2$. Dacă G are două subgrupuri H_1 și H_2 , fiecare cu câte n elemente, astfel încât $H_1 \cap H_2 = \{e\}$, să se arate că:

- pentru orice $x_1 \in H_1 \setminus \{e\}$ și orice $x_2 \in H_2 \setminus \{e\}$ avem $x_1 x_2 = c$, unde $\{c\} = G \setminus (H_1 \cup H_2)$,
- $n = 2$ și G este izomorf cu grupul lui Klein.

RMT

Subiectul IV

Se consideră grupul $(\mathbb{Z}_n, +)$, $n \geq 2$.

- Arătați că ecuația $\hat{2}x = \hat{0}$ are cel mult două soluții.
- Demonstrați că, oricum am alege trei subgrupuri ale lui $(\mathbb{Z}_n, +)$, cel puțin două dintre ele au aceeași sumă a elementelor.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timpul de lucru este de 3 ore.