Olimpiada naţională de matematică

etapa locală

05.03.2016

Clasa a V-a

1. Determinati numerele $\overline{abc}$ astfel încât are loc egalitatea:

$$2(\overline{ab}+\overline{ba})+2^c=67.$$

Gazeta Matematica 10/ 2015

2. a) Calculați :

$$N=2+3\cdot\{4+5\cdot[(2^3\cdot3^2\cdot5)^2:(2^5\cdot3^3\cdot5^2)-6]\}.$$

b) Comparați numerele naturale a şi b unde:

$$a=(2^0+8^{21}:16^{15}+6\cdot27^{10}:81^7)^{63}$$ şi

$$b=(2^{2^5}:4^{13}-1)^{54}.$$

c) Determinati numerele naturale x, y şi z ştiind că:

$$2^x+2^y+2^z=67.$$

prof. Delia Olari, Şcoala Gimnazială „Vasile Lucaciu” Apa

3. Arătați că suma tuturor numerelor naturale nenule care împărțite la 51 dau câtul egal cu dublul restului nu este pătrat perfect.

(***)

4. Trei numere naturale nenule a, b, c se numesc *triolimpice* dacă au aceeaşi suma a divizorilor lor naturali.

a) Arătați că numerele 33; 35 şi 47 sunt *triolimpice*.

b) Verificați că numerele 66; 70 şi 94 sunt *triolimpice*.

c) Demonstrați ca există o infinitate de triplete de numere naturale *triolimpice*.

prof. Petru Braica, Scoala Gimnazială „Grigore Moisil” Satu Mare

BAREM de corectare

1.	Numărul $2(\overline{ab}+\overline{ba})$ este par iar numărul 67 este impar, rezultă că 2^c este impar, deci c = 0	2p
	Din $2(\overline{ab}+\overline{ba})+1=67$ obţinem $2(\overline{ab}+\overline{ba})=66$ sau $\overline{ab}+\overline{ba}=33$ echivalent cu 11(a+b) = 33	2p
	Perechile (a;b) sunt { (2;1); (1;2) }	2p
	Aşadar numerele căutate sunt 210 şi 120	1p
	TOTAL Subiectul 1	**7 p**
2. a)	N = 14	2p
	$a = 63^{63}$	1p
b)	$b = 63^{54}$	1p
	a> b	1p
	Din principiul parităţii un termen trebuie să fie impar, sau toţi termenii impari. Convine un termen impar şi ceilalţi doi pari	1p
c)	De exemplu x = 0, rezultă $2^y+2^z=66$, iar după împărţirea la 2 avem că $2^{y-1}+2^{z-1}=33$. Deoarece 33= 1+ 32 sau 32+1 obţinem tripletele: (x;y;z) aparţine mulţimii { (0;1;6);(0;6;1); (1;0;6); (1;6;0); (6;0;1); (6;1;0)	1p
	TOTAL Subiectul 2	**7 p**
3.	Din teorema împărţirii cu rest avem că: n= 51c + r, r <5 1, c = 2r	2p
	Din cele două egalităţi obţinem imediat că n= 103r, cu r având valorile posibile 0; 1;2,..., 50	1p
	Valoarea sumei cerute este S=103(1+2+3+...+50)= 103 x 25x17x3	2p
	Numărul S e divizibil cu 3 dar nu e divizibil cu 9, in consecinţă nu este pătat perfect	2p
	TOTAL Subiectul 3	**7 p**
4. a)	1 + 3 + 11 + 33 = 1 + 5 + 7 + 35 = 1 + 47 = 48	3p

b)	D_{66} = {1; 3; 11; 33; 2; 2x3; 2x11; 2x33} S_{66} = (1 + 3 + 11 + 33) + 2(1 + 3 + 11 + 33) = (1 + 2)(1 + 3 + 11 + 33) = 3x48. D_{70} = {1; 5; 7; 35; 2; 2x5; 2x7; 2x35} S_{70} = (1 + 5 + 7 + 35) + 2(1 + 5 + 7 + 35) = (1 + 2)(1 + 5 + 7 + 35) = 3x48 D_{94} ={1; 47; 2; 2x47} S_{94} = (1 + 47) + 2(1 + 47) = (1 + 2)(1 + 47) = 3x48, deci avem numere triolimpice	**2p**
c)	Fie p un număr prim mai mare decât 47. Vom arăta că numerele px33, px35 şi px 47 sunt triolimpice. D_{px33}={1; 3; 11; 33; p; px3; px11; px33} S_{px33}= (1 + 3 + 11 + 33) + p(1 + 3 + 11 + 33) = (1 + p)(1 + 3 + 11 + 33) = (1 + p)x48 D_{px35} = {1; 5; 7; 35; p; px5; px7; px35} S_{px35} = (1 + 5 + 7 + 35) + p(1 + 5 + 7 + 35) = (1 + p)(1 + 5 + 7 + 35) = (1 + p)x48 D_{px47} ={1; 47; p; px47} S_{px47} = (1 + 47) + p(1 + 47) = (1 + p)(1 + 47) = (1 + p)x48. Cum există o infinitate de numere prime mai mare decât 47 rezultă că va exista o infinitate de triplete de numere *triolimpice*	**2p**
	TOTAL Subiectul 4	**7 p**