Inspectoratul Scolar Judetean Gorj

OLIMPIADA NATIONALA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, CLASA A VIII-A

15 februarie 2015

1 .a) Arătați că $\sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}}=\frac{k^2+k+1}{k(k+1)}=1+\frac{1}{k(k+1)}$ $\mathbb{Q}$, $\forall$ k$\in \mathbb{N}^*$

b) Calculați suma:

$$S=\frac{3}{2}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{99^2}+\frac{1}{100^2}}$$

2 a) Fie a;b;c-numere raționale pozitive astfel încât $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ = c. Arătați că $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ sunt numere raționale.

b) Determinați perechile de numere naturale pentru care numărul

$$A= 2^{2n}- 3^{2m}+2^{n+2}+ 6$$

Să poată fi scris ca o sumă de două numere prime.

GM

3 .Fie ABCD un dreptunghi în care AB=$5\sqrt{3}$, BC=5 și M un punct nesituat în planul dreptunghiului astfel încât MA=10. Știind că (AE) și (AF) sunt mediane în triunghiurile ADM, respectiv ABM, iar (AG este bisectoarea unghiului MAC, G$\in$ (AG este bisectoarea unghiului MAC, G$\in$ (MC). Aflați raportul ariilor triunghiurilor EFG și BCD.

4 .Se dă trapezul ABCD (DC|| AB) în care BC este dublul laturii AD, iar BD$\perp$ AD. Bisectoarea unghiului C intersectează diagonala BD în E şi $\frac{ED}{EB}=\frac{3}{5}$, iar suma dintre BC şi baza DC a trapezului este 16.

a) Dacă 2DC+ 1=AB, calculaţi aria trapezului.

b) În punctul E se ridică perpendiculara VE pe planul acestuia, VE este media aritmetică a laturilor BC şi CD ale trapezului. Aflaţi distanţa de la V la baza AB a trapezului.

Timp de lucru 3 ore, toate subiectele se noteaza cu 7 puncte.

Barem clasa a VIII a

1) a) $1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}=\frac{k^4+3k^2+2k^3+2k+1}{k^2(k+1)^2}=\frac{(k^2+k+1)^2}{k^2(k+1)^2}$ (2p)

$\sqrt{\frac{(k^2+k+1)^2}{k^2(k+1)^2}}=\frac{k^2+k+1}{k(k+1)}=\frac{k(k+1)+1}{k(k+1)}=1+\frac{1}{k(k+1)}$ 1p

$b) S = \frac{3}{2}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\ldots\ldots\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{99^2}+\frac{1}{100^2}}$

$\frac{3}{2}+\frac{2^2+2+1}{2\cdot3}+\frac{3^2+3+1}{3\cdot4}+\ldots\ldots\ldots+\frac{99^2+99+1}{99(99+1)}$ (1P)

$S=(1+\frac{1}{1.2})+(1+\frac{1}{2.3})+\ldots\ldots(1+\frac{1}{99.100})$(1p)

$S=99+1-\frac{1}{100}$ (1p)

$S=\frac{99.101}{100}$ (1p)

2) a) $\sqrt{a}+\sqrt{b}=c \mid (\sqrt{a}-\sqrt{b})$ ....(1p)

$a-b=c(\sqrt{a}-\sqrt{b}) \Rightarrow \sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{c}$

$\sqrt{a}+\sqrt{b}=c$

$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{c}$

$2\sqrt{a}=\frac{a-b+c^2}{c} \Rightarrow \sqrt{a}=\frac{a-b+c^2}{2c}$ ....(1p)

$\sqrt{b}=\frac{b-a+c^2}{2c}$ .... (1p)

$b)$ daca $n=0 \Rightarrow A=11-3^{2m} \in \mathbb{N}$ daca $m \in \{0;1\}$ ....(1p)

Pt $m=0 \Rightarrow A=10=3+7$

$m=1$ $A=2$- nu poate fi scris ca suma de doua numere prime

pt. $n>0 \Rightarrow A$ este impar $\Rightarrow A=2+p$ cu p nr. prim $\Rightarrow$

$\Rightarrow p=2^n-3^{2n}+2^{n+2}+4=(2^n+2)^2-3^{2m}=(2^n+3^m+2)(2^n-3^m+2)$

$2^n+3^m+2>1 \Rightarrow 2^n-3^m+2=1 \Rightarrow 2^n+3^m=p$... (1p)

$2^n+1=3^m \Rightarrow$ n este impar

Pt $n=1$ se obține $m=1$.. (1p)

Pt $n\geq 3 \Rightarrow 2^n+1=\mathcal{M}_4+1 \Rightarrow 3^m \in \mathcal{M}_4+(-1)^n \Rightarrow$ m este par $\Rightarrow m=2k$

$2^n+1=3^{2k} \Rightarrow 2^n=3^k-1=(3^k-1)(3^k+1) \Rightarrow n=3$ si $k=1 \Rightarrow m=2 \Rightarrow p=19$

$(n;m)\in\{(0,0);(1,1);(3,2)\}$ .... (1p)

3) ABCD dreptunghi⇒AC=10, deci ΔMAC isoscel (2p)

(AG bisectoare, deci (AG) este mediană.

FG- linie mijlocie în ΔMBC, deci FG||BC, FG=$\frac{BC}{2}$ (1p)

FG||(BCD) (1p)

EF||(BCD) (1p)

ΔEFG~ΔBCD⇒ $\frac{A\Delta EFG}{A\Delta BCD} = (\frac{FG}{BC})^2 = \frac{1}{4}$ (2p)

4)a) $\frac{ED}{EB}=\frac{3}{5}$ DC+BC=16

$\Delta BCD \overset{th.bis}{\Rightarrow} \frac{DC}{BC} = \frac{DE}{BC}$ ⇒ DC=6

BC=10

AD=5

AB=13 (1p)

$\Delta ABD \overset{T.P}{\Rightarrow}$ DB=12

$A_{\Delta ABD}$=30 (1p)

$DF = \frac{60}{13}$

Finalizare $A_{ABCD}=\frac{570}{13}$ (1p)

b) VE=$\frac{BC+CD}{2}$=8 cm (1p)

EP ⊥ AB $\overset{T3\perp}{\Rightarrow}$ VP⊥AB (1p)

⇒ $\Delta BEP \sim \Delta BDF$ (1p)

EP=$\frac{75}{26}$

Finalizare VP=$\frac{\sqrt{48889}}{26}$ (1p)