Şimleu Silvaniei, 17 Decembrie, 2022

Concursul Interjudeţean de Matematică "Teodor Topan"
Ediţia a XV-a

CLASA A IX-A - Barem orientativ de corectare

Problema 1. Se dă şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ şi $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$, oricare ar fi $n \geq 1$.
a) Determinaţi a_n, $n \geq 1$.
b) Demonstraţi că pentru orice $m \geq 1$, numărul $a_m a_{m+1}$ este termen al şirului.

***

Soluţie.

a) Se demonstrează prin inducţie că $a_n = (n-1)^2 + 1$.

...4p

b) Se observă că

$$a_m a_{m+1} = [m(m-1)+1]^2 + 1 = a_{m(m-1)+2}.$$

...3p

□

Problema 2. Aflaţi $a \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia $(x+1)\sqrt{x^2+1} = ax$ să admită o unică soluţie raţională pozitivă.

Mihai Opincariu

Soluţie. Se observă că $x = 0$ nu este soluţie, oricare ar fi a. Dacă $x \in \mathbb{Q}^*_{>0}$ este soluţie, atunci şi $\frac{1}{x}$ este soluţie. Din unicitate, rezultă că $x = \frac{1}{x}$, deci $x = 1$.

...3 puncte

Pentru $x = 1$, rezultă $a = 2\sqrt{2}$.

.....1 punct

Pentru $a = 2\sqrt{2}$, ecuaţia admite o unică soluţie raţională pozitivă, deoarece ea este echivalentă cu

$$(x-1)^2(x^2+4x+1) = 0.$$

...3 puncte

□

Problema 3. Să se determine minimul expresiei

$$E(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} x_i$$

unde $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

Soluţie.

Avem

$$2E(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 + \cdots + x_n)^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 + 2(x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

...1 punct

Folosind, de exemplu, Cauchy-Schwarz se demonstrează că

$$E(x_1, \ldots, x_n) \ge (x_1 + \cdots + x_n)^2 + \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)^2 + 2(x_1 + \cdots + x_n)$$

...3 puncte

Membrul drept este egal cu

$$\frac{n+1}{n}\left(x_1 + \cdots + x_n + \frac{n}{n+1}\right)^2 - \frac{n}{n+1} \ge -\frac{n}{n+1}$$

...2 puncte

Egaltatea se atinge pentru $x_1 = \cdots = x_n = -\frac{1}{n+1}$. ...1 punct

□

Problema 4. Fie ABC un triunghi, $AB'PC'$ un patrulater şi K, L, M mijloacele segmentelor $[BB'], [CC']$, respectiv $[KL]$. Să se arate că $AB'PC'$ este paralelogram dacă şi numai dacă $\overrightarrow{GM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GP}$, unde G este centrul de greutate al triunghiului ABC.

Soluţie.

Fie O arbitrar în planul $\triangle ABC$. Atunci avem

$$\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB'}), \overrightarrow{OL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC'})$$

şi

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}) \tag{1}$$

...1 punct

Necesitate: Din $AB'PC'$ paralelogram, rezultă $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}$, deci

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OP}) = \frac{3}{4}\overrightarrow{OG} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OP}$$

de unde $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OG})$, adică $\overrightarrow{GM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GP}$.

...3 puncte

Suficienţă: Din $\overrightarrow{GM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GP}$, rezultă $M \in (GP)$ şi $\frac{GM}{GP} = \frac{1}{4}$. Rezultă $\overrightarrow{OM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OG} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OP})$, iar din (1) obţinem $\overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP}$, adică $ABPC'$ este paralelogram.

...3 puncte