OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA PE LOCALITATE
14.02.2015
Clasa a XII –a M2

Problema 1.

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} (x^2+1)ln(x), & x \geq 1 \\ \frac{x^2-2x+1}{x^2+1}, & x < 1 \end{cases}$ Să se calculeze $I = \int_0^2 f(x)dx$.

Problema 2 .

Pe mulţimea $G = (-1, \infty)$, se defineşte legea de compoziţie internă dată prin $x * y = x + y + xy$, $(\forall)\, x \in G$.

a) Demonstraţi că $(G, *)$ *este grup abelian* .

b) Rezolvaţi în G, ecuaţia $\underbrace{x * x * \ldots * x}_{de\ n\ ori} = 1$, $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$.

Problema 3 .

Fie $I_n = \int_0^1 e^{-x}x^n dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze I_1 .

b) Să se arate că $I_n = nI_{n-1} - \frac{1}{e}$, *pentru orice* $n > 1$.

Problema 4 .

Se consideră matricele $A(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ln(a) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ cu $a > 0$.

a) Calculaţi $\det A(a)$, $(\forall)$ $a > 0$.

b) Să se arate că $A(a)A(b) = A(ab)$.

c) Calculaţi determinantul matricei $A(1) + A(2) + A(3) + \cdots + A(2015)$.

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.
Pentru fiecare problema se acordă de la 0 la 7 puncte .

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală -14.02.2015
Barem de notare
Clasa a XII-a M2

Problema 1 .

$I = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx$ 1p

$\int_0^1 f(x)dx$ 3p

$\int_1^2 f(x)dx$ 3p

Problema 2 .

a) Partea stabilă.. 1p

Asociativitate 1p

Comutativitate 1p

Element neutru 1p

Elemente simetrizabile.. 1p

b) $x * x = (x+1)^2 - 1$ 1p

Finalizare 1p

Problema 3 .

a) $I_1 = \int_0^1 e^{-x} x dx =$,.. ......1p

$I_1 = \int_0^1 (-e^{-x})' x dx = e^{-x} x I_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - \frac{2}{e}$, ... 3p

b) $I_n = \int_0^1 (-e^{-x})' x^n dx = e^{-x} x^n I_0^1 + \int_0^1 e^{-x} (x^n)' dx = -\frac{1}{e} + nI_{n-1}$,.................. 3p

Problema 4 .

a) $\det A(a) = a$ 2p

b) că $A(a)A(b) = \begin{pmatrix} ab & 0 & 0 \\ 0 & 1 & lna + lnb \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ln(ab) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A(ab)$ 2p

c) $A(1) + A(2) + A(3) + \cdots + A(2015) = \begin{pmatrix} 1 + 2 + \cdots + 2015 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ln2015! \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B..2p$

Conform a) avem $\det B = 1 + 2 + \cdots + 2015 = \frac{2016 \cdot 2105}{2}$……………………………….1p