Olimpiada naţională de matematică

Etapa locală, 15 februarie 2014

Clasa a IX a

1. a) Rezolvaţi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} 2x+[y]=5,3 \\ [x]+y=4,2 \end{cases}$,

   unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real $a$ .

   *Gazeta Matematică, supliment 10/2013*

   b) Determinaţi numerele naturale nenule $n$ pentru care egalitatea

   $$\{x\}+\left\{x+\frac{1}{n}\right\}=\{nx\}+\frac{1}{n} \quad \text{este adevărată pentru orice } x\in\mathbb{R},$$

   unde $\{a\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului real $a$

   *Lucian Dragomir, ViitoriOlimpici.ro 2013*

2. Se notează cu $\mathcal{F}$ mulţimea funcţiilor $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ cu proprietatea că

   $$f(a+b)\geq f(a)+f(b),\quad \forall a,b\in\mathbb{Z}.$$

   (i) Arătaţi că există $f\in\mathcal{F}$ cu $f(0)\neq 0$.

   (ii) Demonstraţi că, dacă $f\in\mathcal{F}$ şi $f(1)=|f(-1)|=1$, atunci $f(0)=0$ şi $f(2)=2$.

   * * *

3. Determinaţi numerele întregi $x,y,n$ pentru care sunt adevărate egalităţile

   $$x+y=2^n \text{ şi } x^2+y^2=n^3.$$

   *Lucian Dragomir*

4. Se consideră un triunghi oarecare $ABC$ şi punctele $M\in(BC), N\in(CA), P\in(AB)$ astfel încât $BM=MC, AN=2\cdot NC$ şi $AP=3\cdot PB$. Dacă $T$ este mijlocul lui $(AC)$ şi $R$ este simetricul lui $M$ faţă de $N$, arătaţi că punctele $P,T,R$ sunt coliniare.

   *Gazeta Matematică 3/2013*

*Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.*

Olimpiada naţională de matematică,Etapa locală, 15 februarie 2014,Clasa a IX a, Barem de evaluare

| | |
|---|---|
| **(1)** a) Notând $x=[x]+\alpha,\alpha\in[0,1)$ şi $y=[y]+\beta,\beta\in[0,1)$ , deducem că $\beta=0,2$ şi $\alpha=0,15$ sau $\alpha=0,65$ | (2p) |
| Se obţin imediat perechile $(x,y)=(1,15;3,2)$ şi $(x,y)=(0,65;4,2)$ | (1p) |
| b) pentru că egalitatea trebuie să aibă loc pentru orice număr real $x$, ea trebuie să aibă loc, printre altele, pentru $x=\frac{1}{n}$. Rezultă că $\left\{\frac{1}{n}\right\}+\left\{\frac{2}{n}\right\}=0+\frac{1}{n}$.<br>Dacă $n\geq 3$ această relaţie revine la $0=\frac{1}{n}$, fals. Aşadar pentru $n\geq 3$ egalitatea din enunţ nu are loc pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Rămân de tratat cazurile $n=1$ şi $n=2$. | (1p) |
| ○ Pentru $n=1$ egalitatea din enunţ devine $\{x\}+\{x+1\}=\{x\}+1$, adică $\{x+1\}=1$ care nu este adevărată pentru orice $x\in\mathbb{R}$ (este chiar falsă pentru orice $x\in\mathbb{R}$) | (1p) |
| ○ pentru $n=2$ egalitatea din enunţ revine la $\{x\}+\left\{x+\frac{1}{2}\right\}=\{2x\}+\frac{1}{2}$<br>adică $x-[x]+x+\frac{1}{2}-\left[x+\frac{1}{2}\right]=2x-[2x]+\frac{1}{2}$, deci la $[2x]=[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]$, care este identitatea lui Hermite, adevărată pentru orice număr real $x$.<br>Aşadar singurul număr natural care satisface egalitatea din enunţ este $n=2$. | (2p) |
| | |
| **(2)** (i) de exemplu $f(x)=x-1$(justificare !) | (2p) |
| (ii) pentru $a=b=0\Rightarrow f(0)\leq 0$ (1) | (1p) |
| Deosebim cazurile: (I) $f(1)=f(-1)=1$; luăm $a=1,b=-1$în inegalitatea din enunţ şi ajungem la $f(0)\geq 2$, contradicţie cu (1) | (1p) |
| (II) $f(1)=1, f(-1)=-1$. Luăm $a=1,b=-1$ şi se ajunge la $f(0)\geq 0\overset{(1)}{\Rightarrow} f(0)=0$ | (1p) |
| Pentru $a=b=1\Rightarrow f(2)\geq 2$, iar pentru $a=2,b=-1\Rightarrow f(2)\leq 2$, deci $f(2)=2$ | (2p) |
| **(3)** Remarcăm pentru început, din a doua ecuaţie, că $n\in\mathbb{N}$, apoi imediat $n\neq 0$ | (1p) |
| Folosind inegalitatea $(x+y)^2\leq 2(x^2+y^2)$ deducem că $4^n\leq 2n^3\Rightarrow n\leq 2$ (se demonstrează prin inducţie că $4^n>2n^3,\forall n\in\mathbb{N},n\geq 3$ | (3p) |
| Pentru $n=1$se ajunge la un sistem fără soluţii întregi | (1p) |
| Pentru $n=2$ se găseşte unica soluţie $(x,y)=(2,2)$ | (2p) |
| | |
| **(4)** $\overrightarrow{TN}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$ şi $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ | (2p) |
| $\overrightarrow{TR}=\overrightarrow{TN}+\overrightarrow{NR}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MN}$ | (1p) |
| $\overrightarrow{TR}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CN}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ | (1p) |
| $\overrightarrow{TR}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ | (1p) |
| $\overrightarrow{PT}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ | (1p) |
| $\overrightarrow{PT}=\frac{3}{2}\overrightarrow{TR}$ şi astfel se deduce imediat concluzia dorită | (1p) |
| Notă: Evident, orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător. | |
| Observaţie: pentru o soluţie elementară se poate consulta GM 9/2013, pagina 404 | |