MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN TIMIŞ

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 09.02.2013

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE CLASA A XI-A MATEMATICĂ-INFORMATICĂ

Subiectul 1:

a) Foloseste Hamilton-Cayley si obtine $X^2 = tX$ unde $t = trX$ 2p

Observa $X^3 = t^2X$ de unde $t^2X = A$ 1p

Deduce $t = -1$ si finalizeaza $X = A$ 1p

b) Aduna linia intai la celelalte linii 1p

Deduce ca elementele liniilor 2, 3, ..., n sunt numere pare 1p

Scoate factor comun pe 2 din aceste linii si finalizeaza 1p

Subiectul 2:

a) Scrie $B=I_n-A$ ……………………………………………………………………………….…1p

Inmulteste la stanga si la dreapta relatia anterioara cu A ……………………………………………..1p

Deduce $AB=BA$ ………………………………………………………………………….…1p

b) Inmulteste $A+B=I_n$ la stanga cu A, $A^2+AB=A$ la dreapta cu A si obtine $ABA=O_n$………………...1p

Scrie $(AB)^2=(ABA)B$ de unde $(AB)^2=O_n$ ……………………..…………………………...………1p

Din $I_n=I_n-(AB)^2$ deduce $\det(I_n-AB)\det(I_n+AB)=1$……………………………………………….……..1p

Finalizeaza $\det(I_n+AB) \neq 0$ ……………………...……………………………………………….….1p

Subiectul 3:

a) Scrie $a_{n+1} - a_n = \dfrac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} < 0$ ………………………………………….…………...1p

Observa $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k} < \dfrac{1}{\sqrt{k}}, k = \overline{1, n-1}$ …………………………..………………......1p

Prin adunare obtine $-2<a_{n-1}$, pentru orice n>1 si deduce convergenta sirului ……………………….....1p

b) Scrie $x_n = \frac{a_n - a}{\frac{1}{\sqrt{n}}}$, unde $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ …………………………………………………………..1p

Aplica Stolz-Cesaro cazul $\frac{0}{0}$ …………………………………………………………………..1p

Obtine $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$ …………………………………………………………...1p

Finalizeaza $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$ ……………………………………………………………………...1p

Subiectul 4:

Scrie $x_{n+1} - 1 = (x_n - 1)^2 \geq 0$ si $x_{n+1} - 2 = x_n(x_n - 2)$ ……………………………………….....1p

Demonstreaza prin inductie matematica marginirea sirului ………………….…………...…….. 1p

Calculeaza $x_{n+1} - x_n = (x_n - 1)(x_n - 2) \leq 0$ ……………………………………………………..1p

Deduce monotonia sirului……………………………………………..………………………….1p

Trece la limita in relatia de recurenta si obtine x=1 sau x=2, unde $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ …………………….……1p

Daca x_0=a=2 atunci x_n=2 pentru orice $n \in N$ si
$x_n \to 2$ ……………………………………….....…1p

Daca x_0=a$\in[1,2)$ atunci $x_n \in [1,2)$ si cum (x_n) este descrescator avem
$x_n \to 1$ ……….………….………1p

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN TIMIŞ

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 09.02.2013

SUBIECTE - clasa a XI-a matematică-informatică:

1.	**a)** Fie matricea $A \in M_2(R), A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$. Să se rezolve ecuaţia $X^3 = A, X \in M_2(R)$; **b)** Fie Δ_n un determinant de ordinul n, $n \in N^*$ cu elemente numere întregi impare. Să se demonstreze că $\Delta_n \vdots 2^{n-1}, n \in N^*$
2.	Fie $A, B \in M_n(R)$ astfel încat $A + B = I_n$ şi $A^2 = A^3$. Să se arate că: **a)** $AB = BA$; **b)** $I_n + AB$ este inversabilă.
3.	Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, cu $a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$. **a)** Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent; **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, unde $x_n = \sqrt{n}\left(a_n - \lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)$.
4.	Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin relaţia de recurenţă: $x_0 = a,\ a \in [1;2],\ x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$. Să se studieze convergenţa şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ şi în caz de convergenţă să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

NOTĂ:
1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Timpul de lucru este de trei ore.
3. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.

succes!

prof.Zeno Blajovan, inspector de specialitate - I.S.J. Timiş