OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 14.02.2015

Clasa a X-a

1. Să se rezolve în **R** ecuaţia: $\frac{1}{2^x+3^x}+\frac{1}{3^x+4^x}+\frac{1}{6^x+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+\frac{1}{6^x}\right)$.

Marian Cucoaneş, GM 2/2014

2. Să se arate că dacă $x=\log_2 6$ şi $y=\log_3 6$, atunci au loc relaţiile:

a) $x+y=xy$, $\frac{1}{y}-\frac{1}{x}<\frac{1}{4}$.

b) $x^2+y^2>8{,}81$.

Traian Sfetcu

3. Fie funcţia $f:R\to R,\ f(x)=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}$. Să se rezolve ecuaţiile $f(x)=1$, $f(x)=3$.

Să se discute în funcţie de valorile lui $\alpha\in R$, numărul soluţiilor ecuaţiei $f(x)=\alpha$.

Traian Sfetcu

4. Fie $z_1=x-y\varepsilon,\ z_2=y-z\varepsilon,\ z_3=z-x\varepsilon$, numere complexe cu $|z_1|=1, |z_2|=2, |z_3|=3$ unde x, y, z sunt reale, diferite şi ε este o rădăcină de ordin trei a unităţii diferită de 1. ($\varepsilon^3=1,\ \varepsilon^2+\varepsilon+1=0$).

a) Să se arate că z_1, z_2, z_3 sunt afixele vârfurilor unui triunghi ehilateral.

b) Dacă $xy+yz+zx=0$, să se calculeze aria triunghiului.

Traian Sfetcu

NOTĂ: Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.