	Olimpiada Naţională Gazeta Matematică 2021 **Etapa a III a , 15.05.2021** **(Arad, Caraş-Severin, Hunedoara, Timiş)** **Clasa a VI-a**	

Enunţuri + soluţii (idei, indicaţii)

1. O mulţime A de numere întregi este formată din trei numere întregi. Adunând în toate modurile posibile câte două elemente din mulţimea A se obţin următoarele sume: 3 , 6 şi 13. Produsul elementelor mulţimii A este egal cu:

   A. 96 **B.** -56 **C.** -80 **D.** -120 **E.** -60

   Indicaţie: Dacă $A=\{a,b,c\}$, atunci avem:

   $a+b=3, b+c=6, c+a=13 \Rightarrow a+b+c=11 \Rightarrow A=\{-2,5,8\}$

2. Cuiele cu ajutorul cărora se fixează potcoavele se numesc *caiele*. Pentru potcovirea cailor unei ferme se folosesc, la fiecare copită, acelaşi număr n de *caiele*, $2 \le n \le 6$. Se constată că, după ce au fost potcoviţi 25% din caii fermei, au fost folosite 516 de *caiele*. Numărul n este egal cu:

   A. 3 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 6 **E.** 5

   Idei: Dacă x este numărul cailor, atunci 4 divide x şi avem

   $4nx \cdot \frac{25}{100} = 516 \Rightarrow nx = 516 = 3 \cdot 4 \cdot 43 \Rightarrow n = 3.$

3. O carte este *ciudată* dacă toate paginile sale sunt numerotate cu numere formate numai cu cifre impare (aşadar, de exemplu, a şasea pagină este numerotată cu 11). Numărul care se află pe pagina 79 a unei cărţi *ciudate* este:

   Idei: Pe pagina 10 este scris numărul 19, pe pagina 20 este numărul 59, ..., pe pagina 70 este numărul 359, pe pagina 79 este scris numărul 397.

   A. 377 **B.** 407 **C.** 391 **D.** 405 **E.** 397

4. Mulţimea numerelor naturale impare se împarte în submulţimi astfel: $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{3,5\}$, $A_3 = \{7,9,11\}, \ldots$, aşadar în mulţimea A_k sunt *k* numere impare consecutive. Numărul *n* pentru care $2021 \in A_n$ este:

A. 44 **B.** 46 **C.** 47 **D.** 43 **E.** 45

Idei: Primul element din mulţimea A_k este $a_k = (k-1)k+1$, iar ultimul este $b_k = k(k+1)-1$;

din $(k-1)k+1 \le 2021 \le k(k+1)-1$, se ajunge la $k = 45$.

5. Numărul numerelor naturale de 5 cifre, divizibile cu 5 şi care au suma primelor două cifre egală cu 5, este:

A. 1000 B. 3200 C. 1600 D. 400 E. 800

Soluţie : Notăm $A = \{0,1,2,\ldots,9\}$. Numerele căutate sunt de forma $\overline{abcde}$;

$\overline{ab} \in \{14,23,32,41,50\}$, $c,d \in A, e \in \{0,5\}$; cu principiul produsului obţinem

$5 \cdot 10^2 = 1000$ numere.

6. O submulţime $B = \{a,b,c,d\}$ a mulţimii $A = \{1,2,3,,\ldots,30\}$ se numeşte *interesantă* dacă $a+b=c+d=30$. Numărul submulţimilor *interesante* este egal cu:

A. 91 **B.** 182 **C.** 78 **D.** 156 **E. 87**

Idei (soluţie): Putem considera $a<c<b<d$ şi astfel avem:

$a+b=30$ se poate obţine în cazurile:

(1) $a=1, b=29$, iar $(c,d) \in \{(2,28),(3,27),\ldots,(14,16)\}$, aşadar obţinem 13 submulţimi *interesante*

(2) $a=2, b=28$, iar $(c,d) \in \{(3,27),(4,26),\ldots,(14,16)\}$, aşadar obţinem 12 submulţimi *interesante*...

În total ajungem la $1+2+3+\ldots+13=91$ de submulţimi *interesante.*

7. Suma cifrelor unui număr natural nenul *n* se notează cu $s(n)$. Numărul numerelor *n* de trei cifre pentru care $s(s(n))=10$ este egal cu:

Idei: Pentru $n=\overline{abc}$ avem $2 \le s(n) \le 27$; singurul număr mai mic decât 27 care are suma cifrelor 10 este 19, aşadar $a+b+c=19$; dacă $a=1$, avem $b+c=18 \Rightarrow b=c=9$, deci (1 caz); dacă $a=2$, atunci $b+c=17$, aşadar avem două cazuri posibile. Continuăm numărarea în acelaşi fel şi obţinem $1+2+3+\ldots+9=45$ numere.

A. 36 **B.** 90 **C.** 45 **D.** 72 **E.** 55

8. Se consideră fracţiile $f_1 = \frac{n+2}{3n}$, $f_2 = \frac{2n}{n+1}$, $f_3 = \frac{n+6}{2n}$, $f_4 = \frac{4n+3}{6n+4}$, $f_5 = \frac{2n+1}{3n+1}$, unde n este un număr natural nenul. Numărul fracţiilor ireductibile din mulţimea $H = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$ este egal cu:

Indicaţii: f_1 şi f_3 sunt reductibile dacă n este număr par, f_2 este reductibilă dacă n este impar, iar f_4 şi f_5 sunt ireductibile (de exemplu, dacă d este cel mai mare divizor comun al numerelor $4n+3$ şi $6n+4$, atunci $d \mid 3(4n+3)-2(6n+4)=1$).

A. 2 **B.** 3 **C.** 0 **D.** 4 **E.** 1

9. Pe fiecare dintre laturile unui triunghi se consideră câte 5 puncte distincte, diferite de vârfurile triunghiului. Numărul de triunghiuri care au vârfurile în câte trei dintre cele 15 puncte considerate este egal cu:

Indicaţii: Alegând câte un vârf de pe fiecare latură obţinem $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ triunghiuri. Alegând două vârfuri de pe o latură obţinem $10 \cdot 10 \cdot 3 = 300$ triunghiuri, în total 425 triunghiuri.

A. 425 **B.** 125 **C.** 225 **D.** 300 **E.** 375

10. Un pătrat cu lungimea laturii de 9cm este împărţit, prin drepte paralele la laturile sale, în 9 pătrate cu lungimea laturii de 3 cm, pe care le vom numi *căsuţe*. În fiecare din cele 9 căsuţe este scris numărul 0. Un *pas* înseamnă alegerea unui pătrat cu latura de 6 cm şi adunarea numărului 1 la fiecare dintre numerele scrise în cele patru *căsuţe*. După 2021 de astfel de *paşi*, suma numerelor obţinute în cele 9 *căsuţe* ale pătratului este egală cu:

A. 4042 **B.** 8084 **C.** 6063 **D.** 12126 **E.** 16168

Idee: La fiecare *pas* suma numerelor creşte cu 4, aşadar suma cerută este $4 \cdot 2021 = 8084$.

11. Alexia, Bianca, Cristina, Delia şi Elena (pe care le vom numi A,B,C,D şi E) joacă un joc în care fiecare este lup sau vulpe.

A spune că B nu este vulpe.
B spune că C nu este vulpe.
C spune că D este lup.
D spune că A şi E sunt animale diferite.
E spune că A nu este lup.

Ştiind că orice afirmaţie a unui lup este falsă, iar orice afirmaţie a unei vulpi este adevărată, stabiliţi care dintre prietene sunt lupi:

A. A şi D **B.** A şi E **C.** B şi C **D.** C şi E **E.** B şi D

Idee: Dacă A este lup, atunci A minte, deci B este vulpe şi B spune adevărul, deci C este lup. Aşadar C minte, deci D nu este lup, adică D este vulpe. Continuînd raţionamentul, se ajunge la concluzia că B şi D sunt lupi.

12. Pentru efectuarea unei lucrări, 6 muncitori trebuie să lucreze 5 zile, muncind câte 8 ore pe zi. Numărul de muncitori necesari pentru a efectua aceeaşi lucrare, dar în 4 zile, muncind câte 6 ore pe zi, este egal cu:

A. 10 **B.** 8 **C.** 16 **D.** 11 **E.** 12

Idee: $6 \cdot 5 \cdot 8 = x \cdot 4 \cdot 6 \Rightarrow x = 10$ (muncitori).

13. Numerele naturale x, y, z, t reprezintă măsurile a patru unghiuri (exprimate în grade) în jurul unui punct. Se ştie că $2x, 3y, 4z, 5t$ sunt direct proporționale cu numerele 4, 6, 12, respectiv a, unde a este un număr natural nenul. Dacă $x + y = z + t$, atunci numărul $u = 4x - 3y + 2z - t$ este egal cu:

A. 330 **B.** 315 **C.** 345 **D.** 270 **E.** 360

Indicaţii: $\frac{2x}{4} = \frac{3y}{6} = \frac{4z}{12} = \frac{5t}{a} = k \Rightarrow t = \frac{ak}{5}$; din $x + y = z + t = 180$ se ajunge imediat la $k = 45, a = 5, u = 315$.

14. Se consideră unghiul $\sphericalangle AOB$ cu măsura egală cu 128^o şi $[OA_1$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOB$, $[OA_2$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOA_1$, $[OA_3$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOA_2$, ..., $[OA_5$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOA_4$. Măsura unghiului $\sphericalangle A_2OA_5$ este egală cu:

A. 42° **B.** 28° C. 56° D. 32° E. 24°

Idee: (Un desen corect este de mare ajutor)

$$m(\sphericalangle AOB) = 2 \cdot m(\sphericalangle AOA_1) = ... = 2^5 \cdot m(\sphericalangle AOA_5) \Rightarrow$$
$$m(\sphericalangle AOA_5) = 4^o \Rightarrow m(\sphericalangle A_2OA_5) = 28^o$$

15. Într-un bazin sunt 117 peşti; dintre aceşti peşti, unii sunt mici, iar alţii sunt mari. Fiecare peşte mare mănâncă exact doi peşti mici şi astfel în bazin rămân doar peşti mari; după ce în bazin rămân doar peşti mari, se introduc în bazin câţiva peşti uriaşi. Dacă fiecare peşte uriaş mănâncă exact trei peşti mari şi în bazin rămân doar peştii uriaşi, atunci numărul peştilor uriaşi introduşi în bazin este egal cu:

A. 8 **B.** 13 **C.** 11 **D.** 15 **E.** 10

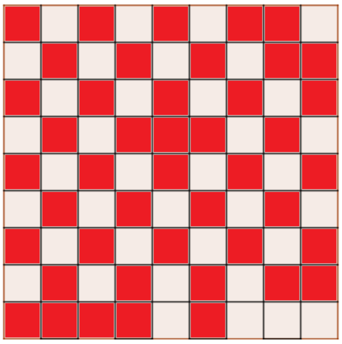
Idee: Dacă x este numărul peştilor mari, atunci $2x$ este numărul peştilor mici şi astfel

$3x = 117 \Rightarrow x = 39$; avem astfel $39 : 3 = 13$ peşti uriaşi.

16. Un pătrat cu lungimea laturii de 9 cm se împarte, prin drepte paralele la laturile sale, în 81 de pătrăţele; 40 dintre acestea se colorează cu roşu, iar celelelalte cu albastru. O linie orizontală sau verticală, formată din 9 pătrăţele, se spune că este *frumoasă*, dacă ea conţine mai multe pătrăţele roşii decât albastre. Numărul maxim posibil de linii *frumoase* este egal cu:

A. 14 **B.** 16 **C.** 12 **D.** 18 **E.** 20

Soluţie (idei): Deoarece sunt 40 de pătrăţele roşii şi o linie *frumoasă* conţine cel puţin 5 roşii (pătrăţele, nu tomate), deducem că putem avea cel mult 8 linii orizontale *frumoase* şi cel mult 8 linii verticale *frumoase*, total 16. Observaţie: ar mai fi de arătat că o astfel de configuraţie este şi posibilă. De exemplu:



17.Se spune că o mulţime care conţine cel puţin trei numere pare consecutive se numeşte *olimpică*. Numărul submulţimilor *olimpice* ale mulţimii $M=\{2,3,4,5,6,7,8\}$ este egal cu:

A. 16 **B.** 64 **C.** 40 **D.** 32 **E.** 24

Idee: Există $2^4=16$ submulţimi care conţin numerele 2, 4, 6 (numărul submulţimilor mulţimii $\{3,5,7,8\}$) şi $2^3=8$ submulţimi care conţin numerele 4, 6, 8 (numărul submulţimilor $\{3,5,7\}$; total 24 submulţimi *olimpice.*

18.Pe o dreaptă se consideră punctele *A, B, C, D* astfel încât $AB=a, AC=b, BD=c, BC=a+b,$ $CD=a+b-c, AD=c-a,$ distanţele fiind exprimate în cm, cu a,b,c,d numere raţionale strict pozitive. Ordinea în care sunt situate punctele pe dreaptă este:

A. B,A,C,D **B.** A,B,C,D **C.** B,C,D,A **D.** C,D,B,A **E.** B,A,D,C

Indicaţii: $BC=a+b=AB+AC \Rightarrow A\in(BC)$, apoi $D\in(BC), A\in(BD)$, aşadar răspuns corect: **E.**

19.Se consideră numerele naturale $a_1,a_2,a_3,...,a_n$ astel încât $a_1=1$ şi fiecare număr, începând cu al doilea, este triplul sumei tuturor numerelor dinaintea sa.
Dacă $a_1+a_2+a_3+...+a_n=2^{20}$, atunci numărul *n* este:

A. 11 **B.** 8 **C.** 12 **D.** 10 **E.** 9

Idee: $a_n=3\cdot 4^{n-2}, n\geq 2 \Rightarrow n=11.$

20. Într-o dimineaţă, veveriţa a lăsat în cuib, pentru cei patru pui ai săi, o grămadă de alune. Fiecare pui, când s-a trezit, crezând că este primul, a luat un sfert din alunele aflate în grămadă şi a plecat la joacă. După ce s-a trezit şi cel mai leneş pui, acesta şi-a luat alunele după aceeaşi regulă. Dacă în cuib au rămas 81 de alune, atunci numărul alunelor lăsate în cuib de către veveriţă a fost:

A. 324 **B.** 512 **C.** 256 **D.** 364 **E.** 420

Indicaţii: Numărul alunelor lăsate în cuib de al treilea pui este $81\cdot\frac{4}{3}=108$, al doilea pui a lăsat $108\cdot\frac{4}{3}=144$ alune, primul a lăsat $144\cdot\frac{4}{3}=192$ alune, aşadar au fost iniţial $192\cdot\frac{4}{3}=256$ alune.

21. Se spune că un număr natural nenul $n\in\{1,2,3,...,9\}$ este *deosebit* dacă numărul $A(n)=\frac{1}{n}+\frac{1}{\overline{0,(n)}}+\frac{1}{\overline{0,0(n)}}$ este natural. Suma tuturor numerelor *deosebite* este egală cu:

A. 13 **B.** 11 **C.** 8 **D.** 15 **E.** 12

Indicaţie: calcule imediate conduc la $x\in\{1,2,4,5\}$ Răspuns corect: **E**

22. Se consideră mulţimile A şi B de câte trei numere naturale nenule care verifică toate următoarele proprietăţi:

(1) $A\cap\{1,2\}\neq\varnothing$.

(2) Mulţimea $A\cap B$ are exact un element.

(3) Pentru orice $a\in A$, există $b\in B$ astfel încât $a+b=10$.

(4) Pentru orice $b\in B$, există $a\in A$ astfel încât $b-a=4$.

Suma elementelor mulţimii $A\cup B$ este egală cu:

A. 23 **B.** 24 **C.** 25 **D.** 27 **E.** 30

Indicaţii: Raţionamente logice facile conduc la concluzia că elementul cel mai mare al mulţimii A este cel mult egal cu 5, iar cel mai mic al lui B este cel puţin 5. Final: $A=\{1,3,5\}, B=\{5,7,9\}$ şi răspuns corect: **C.**

23. Într-un triunghi ascuţitunghic ABC, trei dintre cele şase unghiuri adiacente formate în jurul ortocentrului de dreptele care includ cele trei înălţimi au măsurile proporţionale cu numerele 7, 7 şi 12, iar suma măsurilor celorlalte trei unghiuri este egală cu 230^o. Cel mai mic dintre unghiurile triunghiului *ABC* are măsura egală cu:

A. 26° **B.** 35° C. 28° D. 30° E. 37°

Indicaţie: Dacă *M,N,P* sunt picioarele înălţimilor din *A, B,* respectiv *C* şi *H* este ortocentrul, notând $x=m(\sphericalangle AHP), y=m(\sphericalangle PHB)$, avem: $12x=7y,\quad 2x+y=130^o$ şi imediat $x=35^o, y=60^o$. Destul de rapid se ajunge acumla răspunsul corect: **B.**

24. Pentru orice două numere întregi p şi q se notează $p \circ q = p + q - p \cdot q$. Ştiind că, şi în acest caz, se efectuează mai întâi calculele din paranteze, numărul întreg $r = [(-5) \circ 1] \circ (1 \circ 7) \circ 2021$ este egal cu:

A. -1 | **B.** 1 | C. 2024 | D. 2034 | E. -2034

Indicaţie: $p \circ 1 = 1 \circ p = 1$, pentru orice număr întreg p

Răspuns corect: **B**