Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, 16 Februarie 2014

CLASA A XII-A

Problema 1. Fie $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă, neconstantă şi F o primitivă a lui f ce satisface $F(0) = F(1) = 0$. Fie $m = \min\limits_{x\in[0,1]} f(x)$ şi $M = \max\limits_{x\in[0,1]} f(x)$. Definim funcţia $g : [0,1] \to \mathbf{R}$ prin $g(x) = xf(x)$, pentru orice $x \in [0,1]$ şi fie G o primitivă a lui g care satisface $G(0) = 0$. Arătaţi că

$$|G(1)| \leq \frac{-mM}{2(M-m)}.$$

Duong Viet Thong, AMM 11581

Problema 2. Fie $\star$ o lege de compoziţie asociativă şi comutativă pe o mulţime S. Presupunem că pentru orice x, $y \in S$ există $z \in S$ astfel încât $x \star z = y$ (z poate depinde de x şi y). Arătaţi că dacă a, b, $c \in S$ satisfac $a \star c = b \star c$ atunci $a = b$.

***

Problema 3. Se consideră numerele reale a şi b şi operaţia $\star$ pe $\mathbf{R}$ definită prin

$$x \star y = xy - a(x+y) + b.$$

Să se arate că intervalul (a, ∞) este o parte stabilă a lui $\mathbf{R}$ faţă de operaţia $\star$ dacă şi numai dacă $b \geq a(a+1)$.

***

Problema 4. Determinaţi familia de primitive

$$I = \int \frac{x\ln(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$$

***

NOTĂ:

Timp de lucru 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se va nota cu puncte de la 1 la 7 (un punct din oficiu).

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, 16 Februarie 2014

Soluţii
Clasa a XII-a

Problema 1: Oficiu 1 p.

a) 1 p.

Deoarece f este o functie neconstanta deducem ca $f \not\equiv 0$ in $[0,1]$. Cum $F(0) = F(1) = 0$ rezultă că f schimbă semnul in $[0,1]$ (altfel, cum $f = F'$ ar rezulta ca F ar fi fie crescatoare, fie descrescatoare pe $[0,1]$ si cum $F(0) = F(1) = 0$ asta ar insemna $F \equiv 0$ in $[0,1]$ fapt ce ar implica $f = 0$ in $[0,1]$, contradictie cu presupunerea $f \not\equiv 0$ in $[0,1]$.) Astfel, $m < 0 < M$. Rezulta ca daca $G(1) = 0$ concluzia este clara.

b) 1 p.

Presupunem $G(1) \neq 0$. Inmultind eventual f cu o constanta putem presupune ca $M - m = 1$ (altfel inlocuim f cu $f/(M-m)$) si $G(1) > 0$ (daca $G(1) < 0$ inmultim f cu (-1) si avem in noua situatie $G(1) > 0$ iar rolurile lui m si M se inverseaza).

c) 1 p.

Definim functia $H : [0,1] \to \mathbf{R}$ prin

$$H(x) = \begin{cases} m, & 0 \leq x \leq M, \\ M, & M < x \leq 1, \end{cases}$$

si consideram o primitiva a sa $\theta : [0,1] \to \mathbf{R}$ data de

$$\theta(x) = \begin{cases} mx, & 0 \leq x \leq M, \\ Mx - M, & M < x \leq 1, \end{cases}$$

Notam ca $\theta(0) = \theta(1) = 0$.

d) 1 p.

Fie $\psi : [0,1] \to \mathbf{R}$ o primitiva a functiei $[0,1] \ni x \to xH(x)$ data de

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{mx^2}{2}, & 0 \leq x \leq M, \\ \frac{Mx^2}{2} - \frac{M^2}{2}, & M < x \leq 1, \end{cases}$$

Observam ca $\psi(0) = 0$ si cum $M - m = 1$ deducem ca $\psi(1) = \frac{-mM}{2(M-m)}$. Din cele de mai sus deducem ca pentru a incheia demonstratia este suficient sa probam ca $G(1) < \psi(1)$.

e) 2 p.

Amintim ca $\psi'(x) = xH(x)$ iar $G'(x) = xf(x)$ pentru orice $x \in [0,1]$. Cum $H(x) \leq f(x)$ pentru orice $x \in [0, M]$ iar $f(x) \leq H(x)$ pentru orice $x \in [M, 1]$. Din cele de mai sus deducem ca $x(f(x) - H(x)) \leq M(f(x) - H(x))$ pentru orice $x \in [0,1]$. Cu alte cuvinte am gasit ca $(G - \psi)'(x) \leq M(F - \theta)'(x)$ pentru orice $x \in [0,1]$ sau $0 \leq [MF(x) - M\theta(x) - G(x) + \psi(x)]'$ pentru orice $x \in [0,1]$. Deci functia $[0,1] \ni x \to MF(x) - M\theta(x) - G(x) + \psi(x)$ este crescatoare pe $[0,1]$. Astfel $MF(1) - M\theta(1) - G(1) + \psi(1) \geq MF(0) - M\theta(0) - G(0) + \psi(0) = 0$, si tinand cont ca $F(1) = \theta(1) = 0$ gasim $\psi(1) \geq G(1)$ de unde concluzia.

Problema 2: Oficiu 1 p.

a) 2 p.

Presupunem ca $a \star c = b \star c$ si fie e_a, $d \in S$ satisfacand $a \star e_a = a$ si $c \star d = e_a$. Atunci

$$a = a \star e_a = a \star (c \star d) = (a \star c) \star d = (b \star c) \star d = b \star (c \star d) = b \star e_a\,.$$

b) 2p

Repetand rationamentul de mai sus schimband rolurile lui a cu b gasim ca exista $e_b \in S$ astfel incat $a \star e_b = b \star e_b = b$.

c) 2 p.

Din cele de mai sus deducem

$$a = b \star e_a = (a \star e_b) \star e_a = a \star (e_b \star e_a) = a \star (e_a \star e_b) = (a \star e_a) \star e_b = a \star e_b = b\,.$$

Problema 3: Oficiu 1p.

a) 1 p.

Observam ca

$$x \star y = (x - a)(y - a) + b - a^2\,.$$

b) 2 p.

Daca $b \geq a(a+1)$ atunci pentru orice $x,\ y \in (a, \infty)$ avem

$$x \star y = (x - a)(y - a) + b - a^2 \geq b - a^2 \geq a\,,$$

deci $x \star y \in (a, \infty)$, i.e. (a, ∞) este o parte stabila a lui $\mathbf{R}$ in raport cu operatia $\star$.

c) 3 p.

Presupunem acum ca (a, ∞) este o parte stabila a lui $\mathbf{R}$ in raport cu operatia $\star$. Atunci pentru orice $\epsilon > 0$ avem $x_\epsilon := a + \epsilon \in (a, \infty)$ si $y_\epsilon := a + \epsilon \in (a, \infty)$. Deci $x_\epsilon \star y_\epsilon \in (a, \infty)$ pentru orice $\epsilon > 0$, sau echivalent $\epsilon^2 + b - a^2 > a$ pentru orice $\epsilon > 0$. Lasand $\epsilon \to 0$ in ultima inegalitate deducem $b \geq a^2 + a$, si demonstratia este completa.

Problema 4: Oficiu 1 p.

a) 2 p.
Facem schimbarea de variabila $\sqrt{1+x^2} = y$ si deci $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = dy$ si

$$I = \int \ln(1+y)\, dy\,.$$

b) 4 p.
Folosind formula de integrare prin parti gasim

$$\begin{aligned} I &= y\ln(1+y) - \int \frac{y}{1+y}\, dy = y\ln(1+y) - y + \ln(1+y) + C = (y+1)\ln(1+y) - y + C \\ &= (1+\sqrt{1+x^2})\ln(1+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C\,. \end{aligned}$$