OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

16 februarie 2014

Clasa a X- a

SUBIECTUL I

Determinați numerele reale x și y pentru care: $\begin{cases} 3^{x+2y}+2=5^{x+2y} \\ 2^{x-2y}=2y-x+11 \end{cases}$.

SUBIECTUL II

Determinați $x>0, x\neq 1$ din relația

$$\sum_{k=1}^{n}(\log_x 3^k)(\log_x 3^{k!})+\frac{1}{\log_3^2 x}=(n+1)!.$$

SUBIECTUL III

Să se determine $z\in C$ care satisface $\begin{cases} |z-(3+i)|=\sqrt{2} \\ |z-(1+3i)|\leq\sqrt{2} \end{cases}$.

SUBIECTUL IV

Fie b un număr real strict pozitiv și n un număr natural nenul. Să se arate că ecuația $z^{n+1}=bz^n-z-b$ are o rădăcină complex de modul 1, dacă și numai dacă $b=1$ și $n\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$.

G.M. 10/2013,

Băetu Ioan, profesor Botoșani

NOTĂ: ***Fiecare subiect este notat cu un punctaj de la 0 la 7 puncte.***
Timp de lucru – 3 ore.

BAREM DE CORECTARE

etapa locală - 16 februarie 2014

Clasa a X- a

Problema 1.

$x+2y=t$ si prima ecuatie devine $3^t+2=5^t$ cu solutia unica t=1…………………………………………….3p

$x-2y=z$ si a doua ecuatie devine $2^z=11-z$ cu solutia unica z=3…………………………………………….3p

Finalizare ……………………………………………1p

Problema 2.

Scrierea relatiei in forma $(\log_x 3)^2(\sum_{k=1}^{n} k(k!)+1)=(n+1)!$ ………………………………………………………………3p

Calculul sumei $\sum_{k=1}^{n} k(k!)+1=(n+1)!$ ……………………………………………………………………………………2p

Finalizare …………………………………………………………………………………………2p

Problema 3.

Recunoaste prima ecuatie ca ecuatia cercului cu centrul in $M(3+2i)$ si de raza $\sqrt{2}$ ……..2p

Recunoaste a doua ecuatie ca ecutia discului inchis cu centrul in $N(1+3i)$ si de raza $\sqrt{2}$ ……2p

Finalizare ……………………………………………………………………………………………….3p

Problema 4.

Necesitatea

Scrierea ecuatiei in forma $z^n(z-b)=-(z+b)$ ………………………………………………1p

$|z|=1 \Rightarrow |z-b|=|z+b| \Rightarrow z\in iR$ ……………………………………………………………………….2p

$|z|=1 \Rightarrow z=\pm i$ ………………………………………………………………….1p

Finalizare ……………………………………………………………….1p

Suficienta

Observa ca i este solutie……………………………………..2p

Orice solutie corecta se noteaza cu 7 puncte