INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
etapa locală februarie 2016
SUBIECT si BAREM Clasa a X-a

PROBLEMA 1
Rezolvați în R ecuația:

$$54^x + 27^x + 9^x + 3^x = 2^x$$

Soluție:

Împărțim ecuația cu 2^x și obținem $27^x + \left(\frac{27}{2}\right)^x + \left(\frac{9}{2}\right)^x + \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1$.

Fie funcția $f(x) = 27^x + \left(\frac{27}{2}\right)^x + \left(\frac{9}{2}\right)^x + \left(\frac{3}{2}\right)^x - 1$. 3p

Funcția este crescătoare pe R, rezultă f(x)=0 admite cel mult o soluție......................................2p

Observam că x= -1 este soluție, deci x=-1 este soluție unică..2p

PROBLEMA 2
Să se rezolve ecuația

$$\log_4\left(5^x-1\right)=\log_5\left(4^x+1\right).$$

Soluție: Condiție: $5^x-1>0 \Rightarrow x\in(0,\infty)$. 1p

Notăm $\log_4\left(5^x-1\right)=t \Rightarrow 5^x-1=4^t$.

$\log_5\left(4^x+1\right)=t \Rightarrow 4^x+1=5^t$. 1p

Adunând cele două relații de mai sus rezultă $4^x+5^x=4^t+5^t$ 1p

Deoarece funcția $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$, $f(x)=4^x+5^x$ este strict crescătoare, deci injectivă, rezultă $x=t$. 1p

Atunci $5^x-1=4^x$, de unde $\left(\frac{4}{5}\right)^x+\left(\frac{1}{5}\right)^x=1.$ (1) 1p

Funcția $g:\mathbb{R}\to(0,\infty)$, $g(x)=\left(\frac{4}{5}\right)^x+\left(\frac{1}{5}\right)^x$ este strict descrescătoare, prin urmare g este injectivă, deci ecuația (1) are cel mult o soluție, rezultă $x=1$ este soluție unică...2p

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

PROBLEMA 3

Să se arate că dacă $a,b,c\in(0,1)$, atunci $\frac{1}{2+\log_a b}+\frac{1}{2+\log_b c}+\frac{1}{2+\log_c a}\le 1$.

Soluție: Notăm $x=\log_a b$, $y=\log_b c$ şi $z=\log_c a$ şi avem

$x,y,z>0$ și $xyz=\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=1$. 2p

Inegalitatea cerută se transformă în $\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2+y}+\frac{1}{2+z}\le 1$ care, ...1p

după efectuarea calculelor, este echivalentă cu $xy+yz+zx\ge 3$ 2p

Aplicând inegalitatea mediilor obținem: $xy+yz+zx\ge 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}=3\cdot 1=3$. 2p

PROBLEMA 4

Fie numerele complexe $z_1=r_1(\cos t_1+i\sin t_1)$ și $z_2=r_2(\cos t_2+i\sin t_2)$, cu $t_1,t_2\in[0,2\pi)$ și $r_1,r_2\ge 1$. Să se arate că

$$(t_1-t_2)^2+2r_1r_2+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2\ge 4.$$

Soluție: $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})=|z_1|^2+|z_2|^2+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}=$

$=r_1^2+r_2^2+r_1r_2(\cos t_1+i\sin t_1)(\cos t_2-i\sin t_2)+r_1r_2(\cos t_2+i\sin t_2)(\cos t_1-i\sin t_1)$. 2p

Avem:

$$|z_1+z_2|^2=r_1^2+r_2^2+r_1r_2\left[\cos(t_1-t_2)+i\sin(t_1-t_2)+\cos(t_2-t_1)+i\sin(t_2-t_1)\right]$$

$$=r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos(t_1-t_2)$$

$$=(r_1-r_2)^2+2r_1r_2\left[1+\cos(t_1-t_2)\right]$$

$$=(r_1-r_2)^2+4r_1r_2\cos^2\frac{t_1-t_2}{2}.$$ 1p

Deoarece $r_1r_2\ge 1\Rightarrow |z_1+z_2|^2\ge(r_1-r_2)^2+4\cos^2\frac{t_1-t_2}{2}$. 1p

Avem $\sin^2 x\le x^2$, de unde rezultă $\cos^2 x\ge 1-x^2$ 1p

Atunci $|z_1+z_2|^2\ge(r_1-r_2)^2+4\left[1-\left(\frac{t_1-t_2}{2}\right)^2\right]=(r_1-r_2)^2+4-(t_1-t_2)^2$ 1p

$\Leftrightarrow r_1^2+r_2^2+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}\ge r_1^2-2r_1r_2+r_2^2+4-(t_1-t_2)^2$, deci

$(t_1-t_2)^2+2r_1r_2+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2\ge 4$. 1p