INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN SIBIU

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ, 27.02.2016
Clasa a XI-a

1. (7p) Aflați numerele $a, b, c \in R$, $a>0$, ştiind că $\lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot\left(\sqrt{ax^2+2x+3}-bx-c\right)=-1$.

2. Se consideră numerele reale a, b, c distincte două câte două și următorul sistem de ecuaţii în mulţimea numerelor reale:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=1 \\ a^3x+b^3y+c^3z=1 \end{cases}.$$

(3p) a) Arătați că sistemul are o soluţie unică dacă şi numai dacă $a+b+c\neq 0$.
(4p) b) Rezolvați sistemul în cazul $a+b+c=0$. Discuție.

3. (7p) Se consideră şirul $(x_n)_{n\in N}$ cu $x_0\geq 0$, $a\in(0,1)$ și $x_{n+1}=ax_ne^{-x_n}$, $n\in N$. Calculați

$$\lim_{n\to\infty} x_n \ln(1+n^3).$$

GM10/2015

4. (2p) a) Dați un exemplu de matrice $A\in M_3(R)$, astfel încât $A\neq O_3$, $A^2\neq O_3$ şi $A^3=O_3$.
(5p) b) Dacă matricea $B\in M_3(R)$ are proprietatea $B^6=O_3$, arătați că matricele $B-I_3$ și B^2+B+I_3 sunt inversabile. (Cu O_3 s-a notat matricea nulă şi cu I_3 matricea unitate din $M_3(R)$.)

***

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru: 3 ore.

Barem de corectare OLM 2016 Clasa a XI-a

1. Dacă notăm $E = x \cdot \left(\sqrt{ax^2+2x+3} - bx - c\right)$, pentru ca $\lim\limits_{x\to-\infty} E$ să fie finită, trebuie ca $b<0$ (1) .... **(1p)**

Se obţine $E = \dfrac{(a-b^2)x^2 + (2-2bc)x + (3-c^2)}{-\sqrt{a+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}+b+\dfrac{c}{x}}$ .... **(2p)**

$\lim\limits_{x\to-\infty} E = -1 \iff a-b^2=0$ (2), $1-bc=0$ (3), $3-c^2=\sqrt{a}-b$ (4) .... **(1p)**

(1), (2) $\Rightarrow \sqrt{a}=-b$; (4) $\Rightarrow 3-c^2=-2b$; (3) $\Rightarrow c^3-3c-2=0 \Rightarrow c\in\{-1, 2\}$ .... **(2p)**

Dacă $c=2$, atunci $b=\dfrac{1}{2}>0$. Dacă $c=-1$, atunci $b=-1, a=1$ .... **(1p)**

2. Fie A matricea sistemului;

a) $\det A = (c-a)(c-b)(b-a)(a+b+c)$ .... **(2p)**

Cum $c-a\neq 0, c-b\neq 0, b-a\neq 0$, avem soluţie unică $\iff a+b+c\neq 0$ .... **(1p)**

b) Cum $\det A=0$ şi $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} = b-a\neq 0$, rezultă că $\operatorname{rang} A = 2$ .... **(1p)**

$\Delta_{car} = (1-a)(1-b)(b-a)(a+b+1)$ .... **(1p)**

Sistemul are soluţii $\iff a=1$ sau $b=1$ sau $c=1$, adică $1\in\{a, b, c\}$ .... **(1p)**

Dacă $1\in\{a, b, c\}$, fie $z=\lambda\in R$. Rezolvând sistemul format din primele două ecuaţii, se obţine $x=\dfrac{\lambda(c-b)+b-1}{b-a}$, $y=\dfrac{\lambda(a-c)+1-a}{b-a}$, $z=\lambda$; cu $\lambda\in R$ .... **(1p)**

Observaţie. Se poate rezolva întreaga problemă folosind metoda lui Gauss.

3. Notăm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \ln(1+n^3) = l$ (dacă limita există)

Dacă $x_0=0$, atunci $x_n=0$, $\forall n\in N$, deci $l=0$ .... **(1p)**

Fie $x_0>0$; atunci (prin inducţie) $x_n>0$, $\forall n\in N$ .... **(1p)**

Avem $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = a\cdot e^{-x_n} < a$, $\forall n\in N$, de unde $x_n \le a^n x_0$, $\forall n\in N$ .... **(2p)**

Rezultă $0\le x_n\ln(1+n^3)\le a^n x_0 \ln(1+n^3)$, $\forall n\in N$ (1) .... **(1p)**

Folosind $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} a^n P(n)=0$, P funcţie polinomială, avem

$\lim\limits_{n\to\infty} a^n x_0 \ln(1+n^3) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(x_0\cdot\dfrac{\ln(1+n^3)}{1+n^3}\cdot a^n(1+n^3)\right)=0$ .... **(1p)**

Din (1) rezultă $l=0$ .... **(1p)**

4. a) De exemplu $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ .... **(2p)**

b) Avem $(B-I_3)(B^5+B^4+B^3+B^2+B+I_3)=B^6-I_3=-I_3$ .... **(1p)**

Rezultă $\det(B-I_3)\cdot\det C=-1$, unde $C=B^5+B^4+B^3+B^2+B+I_3$ .... **(1p)**

Deci $\det(B-I_3)\neq 0$, ceea ce implică $B-I_3$ inversabilă .... **(1p)**

Avem $C=B^3(B^2+B+I_3)+B^2+B+I_3=(B^2+B+I_3)(B^3+I_3)$ .... **(1p)**

$\det C\neq 0 \;\Rightarrow\; \det(B^2+B+I_3)\neq 0 \;\Rightarrow\; B^2+B+I_3$ inversabilă .... **(1p)**

Observaţie. Se putea utiliza şi descompunerea $B^6-I_3=(B^3+I_3)(B-I_3)(B^2+B+I_3)$ sau, folosind teorema Cayley-Hamilton, din $B^6=O_3$ se deduce $B^3=O_3$ şi atunci rezultatul se obţine din descompunerea $B^3-I_3=(B-I_3)(B^2+B+I_3)$.