Olimpiada de matematică
Etapa locală, 28.02.2015
Clasa a VI-a

Subiecte:

1. Fie numerele naturale $x = \overline{ab},\ y = \overline{cd}$, scrise în baza zece, astfel încât $x > y$ și $xy = 2015$. Să se arate că :
   a) Numărul $z = 31^x \cdot 13^y + 403$ este divizibil cu 2015.

   b) Fracția $\frac{2^x+2^y}{3^x+3^y}$ este reductibilă.

2. Fie n un număr natural astfel încât numerele $n, n + 2$ și $n + 4$ să fie prime. Să se determine cel mai mic număr natural care, împărțit la n dă restul 1, împărțit la $n + 2$ dă restul 2 și împărțit la $n + 4$ dă restul 6.

3. Să se arate că nu există cifrele $a, b, c, a \neq 0$, astfel încât să se verifice egalitatea $\overline{ab} \cdot c = \overline{abc}$, numerele fiind scrise în baza 10.

4. Fie O, A, B, C puncte coliniare astfel încât $A \in (OB)$, $B \in (AC)$ și D mijlocul lui (AB), E mijlocul lui (BC), F mijlocul lui (AC). Să se arate că
$$OA + OB + OC = OD + OE + OF.$$

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 2 ore
La fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

Barem clasa a VI-a

1. a) $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$; x, y fiind numere de două cifre, $x > y$, va rezulta $x = 65, y = 31$ ……………………………………………………………………………………………$2p$

$z = 31^{65} \cdot 13^{31} + 403 = 31^{65} \cdot 13^{31} + 13 \cdot 31 = 31 \cdot 13(31^{64} \cdot 13^{30} + 1)$; deoarece ultima cifră a lui $13^{30} = 13^{4\cdot7+2} = (13^4)^7 \cdot 169$ este 9, rezultă că numărul din paranteză se termină cu cifra 0, deci z este divizibil cu $31 \cdot 13 \cdot 5 = 2015$…………………………… $2p$

b) $2^{65} + 2^{31}$ și $3^{65} + 3^{31}$ se termină cu cifra 0, deci numărătorul și numitorul se divid cu 10. ($2^{65} = 2^{4\cdot16+1}$ are ultima cifră 2, $2^{31} = 2^{4\cdot7+3}$ are ultima cifră 8, $3^{65} = 3^{4\cdot16+1}$ are ultima cifră 3, $3^{31} = 3^{4\cdot7+3}$ are ultima cifră 7)……………………………………………………. $3p$

2. Pentru $n > 3$, $n = 3k$ nu poate fi prim, $n = 3k + 1$ verifică $n + 2 = 3k + 3$ care nu este prim, fiind divizibil cu 3, iar $n = 3k + 2$ verifică $n + 4 = 3k + 6$ care nu este prim, fiind divizibil cu 3. Rezultă că n poate fi 2 sau 3.

Pentru $n = 2$ rezultă numerele 2,4,6 care nu verifică toate prime

Pentru $n = 3$ rezultă numerele 3,5,7 care verifică toate prime, deci numerele sunt 3,5,7 ………………………………………………………………………………………$3p$

Dacă $m = 3p + 1,\ m = 5q + 2,\ m = 7s + 6$ va rezulta $m + 8 = 3p + 9$ divizibil cu 3, $m + 8 = 5q + 10$ divizibil cu 5, $m + 8 = 7s + 14$ divizibil cu 7, deci $m + 8$ este divizibil cu 3,5,7. Deoarece c.m.m.m.c pentru 3,5,7 este 105, va rezulta $m = 97$ cel mai mic număr care verifică proprietățile…………………………………………………………….......... $4p$

3. Ar rezulta $(10a + b) \cdot c = 100a + 10b + c$, $10ac + bc = 100a + 10b + c$, deci

$bc - c = 100a - 10ac + 10b$ sau $(b - 1)c = 10a(10 - c) + 10b$ …… (1)

Din relația din enunț rezultă $c \neq 0$ iar din (1) ar rezulta $b > 1$, deoarece $a > 0, 10 - c > 0$.
Din (1) ar rezulta și $10|(b - 1)c$, (b, c cifre , $b > 1, c \neq 0$) deci $2|c$ și $5|b - 1$ sau $2|b - 1$ și $5|c$……………………………………………………………………………………$4p$

Dacă $5|b - 1, b > 1$ ar rezulta $b = 6$ și în relația (1), $5c = 10a(10 - c) + 60$ și $5c > 60$, contradicție.

Dacă $5|c, c \neq 0$, ar rezulta $c = 5$ și în relația (1), $5(b - 1) = 50a + 10b$ și $5(b - 1) > 60$, contradicție………………………………………………………………………………$3p$

4. Deoarece D este mijlocul lui $[AB]$ va rezulta $2OD = OA + OB$

E este mijlocul lui $[BC]$, rezultă $2OE = OB + OC$

F este mijlocul lui $[AC]$ rezultă $2OF = OA + OC$…………………………………..$4p$

Adunând egalitățile rezultă $2OD + 2OE + 2OF = 2OA + 2OB + 2OC$, de unde se obține relația din enunț…………………………………………………………………..$3p$

Observație.Orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se punctează cu punctajul maxim acordat.