



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 15.02.2015

Clasa a XII-a

SUBIECTUL 1.

Pe \mathbb{R}^* considerăm legea: $x * y = \begin{cases} x \cdot y, & x > 0 \\ \frac{x}{y}, & x < 0 \end{cases}$. Pe $G = (0, \infty) - \{1\}$ considerăm legea: $x \circ y = \begin{cases} x^{\ln y}, & x > 1 \\ \frac{1}{x^{\ln y}}, & 0 < x < 1 \end{cases}$.

Demonstrați că $(\mathbb{R}^*, *)$ și (G, \circ) sunt grupuri necomutative izomorfe între ele.

Nelu Chichirim

SUBIECTUL 2.

Fie (G, \cdot) un grup cu elementul neutru e . Pentru $a \in G$ și $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ definim $f_a : G \rightarrow G$ astfel încât $f_a(x \cdot a) = a^n \cdot x$, $\forall x \in G$, unde $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{\text{de } n \text{ ori}}$. Arătați că f_a este automorfism de grupuri dacă și numai dacă $a^{n-1} = e$.

SUBIECTUL 3.

Calculați:

a) $\int \frac{\sin 7x}{\sin x} dx, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

b) $\int \frac{\cos 7x}{\cos x} dx, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Cristina Homentcovschi

SUBIECTUL 4.

Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție care admite primitive și are proprietatea că $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = a$, $a \in \mathbb{R}$, unde F este o primitivă a lui f . Să se demonstreze că funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$ admite primitive dacă și numai dacă $\alpha = a$.

GMB

Notă:

Timp de lucru: 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.

Nu se acordă puncte din oficiu.



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 15.02.2015

Clasa a XII-a

Barem de corectare și notare

Subiectul 1.

Se demonstrează că $(\mathbb{R}^*, *)$ este grup necomutativ.....**3p**

i) Asociativitate:

Caz I: $x > 0$, se demonstrează că $(x \cdot y) * z = x \cdot (y * z)$. Dacă $y > 0 \Rightarrow x \cdot y > 0 \Rightarrow x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$, adevărat.

Dacă $y < 0 \Rightarrow x \cdot y < 0 \Rightarrow \frac{x \cdot y}{z} = x \cdot \frac{y}{z}$, adevărat.

Caz II: $x < 0$ se demonstrează că $\frac{x}{y} * z = \frac{x}{y * z}$. Dacă $y > 0$, $\frac{x}{y} < 0 \Rightarrow \frac{x}{yz} = \frac{x}{y \cdot z}$, adevărat. Dacă $y < 0$,

$\frac{x}{y} > 0 \Rightarrow \frac{x}{y} \cdot z = \frac{x}{\frac{y}{z}} \Leftrightarrow \frac{x \cdot z}{y} = \frac{xz}{y}$, adevărat.

ii) Observăm că 1 este element neutru: $x * 1 = 1 * x = x, \forall x \in \mathbb{R}^*$

iii) Dacă $x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x}$ este simetricul lui x , iar pentru $x < 0$, simetricul lui x este x .

iv) Din $2 * (-2) \neq (-2) * 2 \Leftrightarrow 2 \cdot (-2) \neq \frac{-2}{2} \Rightarrow (\mathbb{R}^*, *)$ grup necomutativ.

Se demonstrează că (\mathbb{G}, \circ) este grup necomutativ.....**3p**

i) Asociativitate: Dacă $x > 1 \Rightarrow x^{\ln y} \circ z = x^{\ln(y \circ z)}$. Caz I: $y \in (0, 1) \Rightarrow \ln y < 0 \Rightarrow x^{\ln y} < 1$

$\Rightarrow (x^{\ln y})^{\frac{1}{\ln z}} = x^{\ln\left(\frac{1}{y^{\ln z}}\right)} \Leftrightarrow x^{\frac{\ln y}{\ln z}} = x^{\frac{\ln y}{\ln z}}$. Caz II: $y > 1 \Rightarrow \ln y > 0 \Rightarrow x^{\ln y} > 1 \Rightarrow (x^{\ln y})^{\ln z} = x^{\ln(y^{\ln z})} \Leftrightarrow x^{\ln y \cdot \ln z} = x^{\ln y \cdot \ln z}$.

Dacă $x \in (0, 1)$ demonstrăm că $x^{\frac{1}{\ln y} \circ z} = x^{\frac{1}{\ln(y \circ z)}}$. Caz I: $y \in (0, 1) \Rightarrow \ln y < 0 \Rightarrow x^{\ln y} > 1 \Rightarrow \left(x^{\frac{1}{\ln y}}\right)^{\ln z} = x^{\frac{1}{\ln\left(\frac{1}{y^{\ln z}}\right)}}$

$\Leftrightarrow x^{\frac{\ln z}{\ln y}} = x^{\frac{\ln z}{\ln y}}$. Caz II: $y > 1 \Rightarrow \ln y > 0 \Rightarrow x^{\frac{1}{\ln y}} < 1 \Rightarrow \left(x^{\frac{1}{\ln y}}\right)^{\ln z} = x^{\frac{1}{\ln(y^{\ln z})}} \Leftrightarrow x^{\frac{1}{\ln y \cdot \ln z}} = x^{\frac{1}{\ln y \cdot \ln z}}$.

ii) $x \circ e = e \circ x = x, \forall x \in \mathbb{G} \Rightarrow e$ este element neutru

iii) Dacă $x > 1 \Rightarrow e^{\frac{1}{\ln x}}$ este simetricul lui x , iar dacă $x \in (0, 1) \Rightarrow x$ este simetricul lui x .

iv) $2 \circ \frac{1}{2} \neq \frac{1}{2} \circ 2 \Leftrightarrow 2^{\ln \frac{1}{2}} \neq \left(\frac{1}{2}\right)^{\ln 2}$.

Demonstrăm că $f: \mathbb{R}^* \rightarrow (0, \infty) - \{1\}, f(x) = e^x$ izomorfism de grupuri.....**1p**

f evident bijectivă. Caz I: $x > 0 \Rightarrow f(xy) = (e^x)^{\ln e^y} \Leftrightarrow e^{xy} = e^{xy}$. Caz II: $x < 0 \Rightarrow e^x < 1 \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = (e^x)^{\frac{1}{\ln(e^y)}} \Leftrightarrow e^{\frac{x}{y}} = e^{\frac{x}{y}}$

$\Rightarrow f(x * y) = f(x) \circ f(y) \Rightarrow f$ izomorfism de grupuri.

Subiectul 2.

$$f_a(x \cdot a) = a^n \cdot x, \forall x \in G.$$

Înlocuind x cu $xa^{-1} \Rightarrow f_a(x) = a^n \cdot x \cdot a^{-1}, \forall x \in G$ ($x \rightarrow xa^{-1}$ este bijectie!) **1p**

$$" \Rightarrow " f_a(xy) = f_a(x)f_a(y) \Rightarrow a^n xya^{-1} = a^n xa^{-1}a^n ya^{-1} \Rightarrow e = a^{n-1} \dots\dots\dots \mathbf{2p}$$

$$" \Leftarrow " a^{n-1} = e \Rightarrow a^n = a \Rightarrow f_a(x) = axa^{-1} \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

$$f_a(xy) = axya^{-1} = axa^{-1}aya^{-1} = f_a(x)f_a(y), \text{ deci morfism} \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

$$f_a(x_1) = f_a(x_2) \Rightarrow ax_1a^{-1} = ax_2a^{-1} \Rightarrow x_1 = x_2, \text{ deci injectivă} \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

Fie $y \in G \Rightarrow f_a(a^{-1}ya) = a(a^{-1}ya)a^{-1} = y$, deci surjectivă..... **1p**

Subiectul 3.

$$I+J = \int \left(\frac{\sin 7x}{\sin x} + \frac{\cos 7x}{\cos x} \right) dx = \int \frac{\sin 8x}{\sin x \cos x} dx = 2 \int \frac{\sin 8x}{\sin 2x} dx = 2 \int \frac{2 \sin 4x \cos 4x}{\sin 2x} dx = 4 \int 2 \cos 2x \cos 4x dx = \\ = 8 \int \frac{\cos 6x + \cos 2x}{2} dx = 4 \frac{\sin 6x}{6} + 4 \frac{\sin 2x}{2} = \frac{2}{3} \sin 6x + 2 \sin 2x + C \quad (1) \dots\dots\dots \mathbf{3p}$$

$$I-J = \int \left(\frac{\sin 7x}{\sin x} - \frac{\cos 7x}{\cos x} \right) dx = \int \frac{\sin 6x}{\sin x \cos x} dx = 2 \int \frac{\sin 6x}{\sin 2x} dx = 2 \int \frac{3 \sin 2x - 4 \sin^3 2x}{\sin 2x} dx = 2 \int 3 - 4 \sin^2 2x dx = \\ = 6x - 8 \int \sin^2 2x dx = 6x - 8 \int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx = 2x + \sin 4x + C \quad (2) \dots\dots\dots \mathbf{3p}$$

Din (1) și (2) rezultă că $I = \frac{1}{3} \sin 6x + \sin 2x + x + \frac{1}{2} \sin 4x + C$ și $J = \frac{1}{3} \sin 6x + \sin 2x - x - \frac{1}{2} \sin 4x + C$ **1p**

Subiectul 4.

$$\text{Avem } \left(x^2 F \left(\frac{1}{x} \right) \right)' = 2xF \left(\frac{1}{x} \right) - f \left(\frac{1}{x} \right), \forall x \neq 0 \quad (1) \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} xF \left(\frac{1}{x} \right) \text{ și } a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} xF \left(\frac{1}{x} \right) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} xF \left(\frac{1}{x} \right) = a \quad (2) \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

Considerăm $h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, h(x) = \begin{cases} 2xF \left(\frac{1}{x} \right), & x \neq 0 \\ 2a, & x = 0 \end{cases}$ care, din (2), este continuă, deci admite o primitivă notată H .

..... **1p**

$$\text{Din (1) avem } f \left(\frac{1}{x} \right) = \left(H(x) - x^2 F \left(\frac{1}{x} \right) \right)', \forall x \neq 0.$$

$$G: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, G(x) = \begin{cases} H(x) - x^2 F \left(\frac{1}{x} \right) + k_1, & x < 0 \\ k_2, & x = 0 \\ H(x) - x^2 F \left(\frac{1}{x} \right) + k_3, & x > 0 \end{cases} \text{ verifică } G'(x) = g(x), \forall x \in \mathbf{R}^* \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

Din continuitate $\Rightarrow k_1 = k_3, H(0) + k_1 = k_2$

$$\text{Deci } G(x) = \begin{cases} H(x) - x^2 F \left(\frac{1}{x} \right) + k_1, & x \neq 0 \\ H(0) + k_1, & x = 0 \end{cases} \text{ este continuă} \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{G(x) - G(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{H(x) - H(0)}{x - 0} - xF \left(\frac{1}{x} \right) \right) = H'(0) - a = h(0) - a = 2a - a = a \Rightarrow G'(0) = a \dots \mathbf{1p}$$

Deci g admite primitive dacă și numai dacă $G'(0) = g(0) \Leftrightarrow a = \alpha$ **1p**

Notă : Orice altă soluție corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim.