MATEMATIKA OLIMPIÁSZ
KÖRZETI SZAKASZ
2014. február 23

VII. OSZTÁLY

1.) Oldd meg a valós számok halmazán!

a) $\left|9-x^2\right|-\left|3+x\right|=0$

b) $\sqrt{x}=\left(\sqrt{x}\right)^2$

2.) **a)** Számítsd ki: $\left[\left(\sqrt{2}\right)^{-3}+3\sqrt{2}\right]\cdot\dfrac{4}{\sqrt{2}}-3\sqrt{18}\cdot\left(4\sqrt{32}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

b) Határozd meg az $\overline{ab}$ alakú természetes számokat úgy, hogy $\sqrt{a+\sqrt{\overline{ab}}}=a$.

3.) Adott az $ABCD$ rombusz. Legyen E és F az AB, illetve az AD oldal két pontja, úgy hogy $AE = DF$. Ha $BC\cap DE=\{P\}$és $CD\cap BF=\{Q\}$, akkor igazold, hogy:

a) $\dfrac{PE}{PD}+\dfrac{QF}{QB}=1$,

b) a Q, A és P pontok kollineárisak

4.) Az ABC háromszögben AD magasság, az M, N és P az AB, BC illetve AC oldalak felezőpontjai. Igazold, hogy az $MDNP$ vagy $MNDP$ négyszög egyenlőszárú trapéz!

Megjegyzés:

Minden feladat kötelező.

Minden feladat 10 pontot ér.

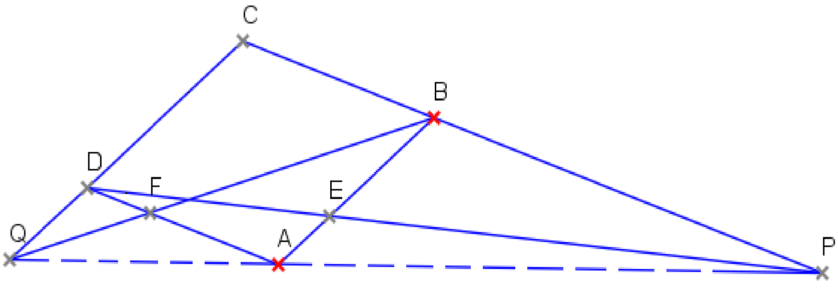
Munkaidő 3 óra.

OLIMPADA DE MATEMATICA
ETAPA LOCALĂ
23 februarie 2014

BAREM
CLASA A VII-A

1.	**Din oficiu**	**1p**
a)	$\lvert 9-x^2\rvert = \lvert(3+x)(3-x)\rvert = \lvert(3+x)\rvert\cdot\lvert(3-x)\rvert$	**1p**
	$\lvert 9-x^2\rvert - \lvert(3+x)\rvert = \lvert(3+x)\rvert\left(\lvert(3-x)\rvert-1\right)=0$	**1p**
	De unde avem $\lvert(3+x)\rvert=0$ sau $\lvert(3-x)\rvert=1$	**1p**
	Din $\lvert(3+x)\rvert=0 \Rightarrow x=-3$	**1p**
	Din $\lvert(3-x)\rvert=1 \Rightarrow 3-x=\pm1 \Rightarrow x=3\mp1$ cu soluțiile $x=2$ sau $x=4$	**1p**
	Mulțimea soluțiilor ecuației $S=\{-3,\ 2,\ 4\}$	**1p**
b)	$x\geq 0,\ \left(\sqrt{x}\right)^2-\sqrt{x}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x}-1\right)=0$	**2p**
	$\sqrt{x}=0$ sau $\sqrt{x}=1$ de unde $x=0$ sau $x=1$ $\Leftrightarrow x\in\{0,1\}$	**1p**

2.	**Din oficiu**	**1p**
a)	$\left[\dfrac{\sqrt{2}}{4}+3\sqrt{2}\right]\cdot\dfrac{4}{\sqrt{2}}-9\sqrt{2}\left(16\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=$	**1p**
	$\dfrac{13\sqrt{2}}{4}\cdot\dfrac{4}{\sqrt{2}}-9\sqrt{2}\,\dfrac{31\sqrt{2}}{2}=$	**1p**
	13-279= - 266	**1p**
b)	Prin ridicarea la pătrat a relaţiei, obţinem $\sqrt{\overline{ab}}=a(a-1)$	**2p**
	$\overline{ab}$ pătrat perfect $\Rightarrow \overline{ab}\in\{16,25,36,49,64,81\}$ (1) și $\sqrt{\overline{ab}}\in\{4,5,6,7,8,9\}$ (2)	**2p**
	Din (1) $\Rightarrow a\in\{1,2,3,4,6,8\}$, $a-1\in\{0,1,2,3,5,7\}$ şi $a(a-1)\in\{0,2,6,12,30,56\}$ (3)	**1p**
	Din (2) şi (3) rezultă a=3 şi soluţia: $\overline{ab}=36$	**1p**

3.	**Din oficiu**	**1p**
a)		**1p**
	$\Delta PDC: EB \parallel DC \overset{TFA}{\Rightarrow} \Delta PEB \sim \Delta PDC \Rightarrow \dfrac{PE}{PD}=\dfrac{EB}{DC}$ (1)	**1p**
	$\Delta QBC: FD \parallel BC \overset{TFA}{\Rightarrow} \Delta QFD \sim \Delta QBC \Rightarrow \dfrac{QF}{QB}=\dfrac{FD}{BC}$ (2)	**1p**
	DC = BC = AD =AB *EB = AB - AE = AD - FD = AF* (3)	**1p**

	(1) + (2) $\Rightarrow \frac{PE}{PD}+\frac{QF}{QB}=\frac{EB}{DC}+\frac{FD}{BC}=\frac{AF+FD}{BC}=\frac{AD}{BC}=1$	**2p**
b)	$(2)\Rightarrow \frac{QF}{QB}=\frac{FD}{BC}\overset{ip}{=}\frac{AE}{AB}\Rightarrow \frac{QF}{QB}=\frac{AE}{AB}\underset{\Delta QAB}{\overset{rec,T.Th}{\Rightarrow}} FE \parallel AQ \quad (3)$	**1p**
	$(1)\Rightarrow \frac{PE}{PD}=\frac{EB}{DC}\overset{ip}{=}\frac{AF}{AD}\Rightarrow \frac{PE}{PD}=\frac{AF}{AD}\underset{\Delta DAP}{\overset{rec.T.Th.}{\Rightarrow}} FE \parallel AP \quad (4)$	**1p**
	(3), (4) $\Rightarrow A\in QP \Leftrightarrow A$-$Q$-$P$ colin.	**1p**

4.	**Din oficiu**	**1p**
	Fie m(B)>m(C). Deoarece MP este linie mijlocie în triunghiul ABC ⇒ MP‖DN	**2p**
	Deoarece DM este mediană în triunghiul dreptunghic ⇒ DM=AB/2	**2p**
	Deoarece NP este linie mijlocie în triunghiul ABC ⇒ NP=AB/2, deci ⇒ DM=NP	**3p**
	⇒ MDNP este trapez isoscel	**1p**
	Analog pentru $m(B)<m(C)$ obținem MNDP este trapez isoscel	**1p**