S.S.M.R - FILIALA MUREŞ

Olimpiada de matematică
Faza locală 9.02.2013
Barem de corectare
Clasa a XII-a

Problema 1

Calculati: $\int \frac{1}{x\left(x^{2012}+2013\right)}dx$, $x>0$.

Gazeta matematică

Solutie: $\int \frac{1}{x\left(x^{2012}+2013\right)}dx=\frac{1}{2013}\int \frac{2013+x^{2012}-x^{2012}}{x\left(x^{2012}+2013\right)}dx=$ (2p)

$=\frac{1}{2013}\int \frac{2013+x^{2012}}{x\left(x^{2012}+2013\right)}-\frac{x^{2012}}{x\left(x^{2012}+2013\right)}dx=$ (1p)

$=\frac{1}{2013}\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x^{2011}}{x^{2012}+2013}\right)dx=$ (1p)

$=\frac{1}{2013}\left(\ln x-\frac{1}{2012}\ln\left(x^{2012}+2013\right)\right)+C.$ (2p)

Din oficiu: 1 p

Problema 2

Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ si multimea:

$G=\left\{X_a\in M_2(\mathbf{R})\mid X_a=I_2+aA,\ a>-\frac{1}{2}\right\}.$

a) Arătati că G este parte stabilă a lui $M_2(\mathbf{R})$ în raport cu înmultirea. Stabiliti, apoi, că $(G,\cdot)$ este grup abelian.

b) Demonstrati că functia $f:G\to\mathbf{R},\ f(X_a)=\ln(2a+1)$ este izomorfism între grupurile $(G,\cdot)$ si $(\mathbf{R},+)$.

c) Calculati $X_{\frac{1}{2}}\cdot X_{\frac{3}{2}}\cdot\ldots\cdot X_{\frac{2n-1}{2}}\ (n\in\mathbf{N}^*)$.

Solutie: *a)* $X_a, X_b\in G,\quad a,b>-\frac{1}{2}$.

$X_a\cdot X_b=I_2+aA+bA+abA^2=I_2+(a+b+2ab)A=X_{a+b+2ab}$ (1)

$a+b+2ab>-\frac{1}{2}\Leftrightarrow(2a+1)(2b+1)>0$ adevărat, $\forall a,b>-\frac{1}{2}$ (2)

Din (1) si (2) $\Rightarrow G$ este parte stabilă a lui $M_2(\mathbf{R})$ în raport cu înmultirea. (1p)

Se verifică axiomele grupului:

$G_1)$ Tinând cont că G este parte stabilă a lui $M_2(\mathbf{R})$ în raport cu înmultirea matricelor , iar înmultirea în $M_2(\mathbf{R})$ este asociativă, deducem că si înmultirea în G este asociativă; (0,25p)

$G_2)$ Întrucât $X_a\cdot X_b=X_{a+b+2ab}=X_{b+a+2ba}=X_b\cdot X_a$, oricare ar fi $X_a,X_b\in G$, rezultă că înmultirea în G este comutativă; (0,25p)

$G_3)$ Cum $I_2=X_0\in G$, rezultă că I_2 este elementul neutru pentru înmultirea în G; (0,25p)

$G_4)$ $\forall X_a\in G,\exists(X_a)^{-1}=X_{a'}\in G,$ astfel încât $X_aX_{a'}=I_2$.

$X_aX_{a'}=I_2\Leftrightarrow X_{a+a'+2aa'}=X_0\Leftrightarrow a'=-\frac{a}{1+2a}>-\frac{1}{2}$. Deci, $X_{a'}=X_{-\frac{a}{1+2a}}\in G$, ceea ce arată că orice element din G este inversabil. (1p)

Din $G_1)$-$G_4)\Rightarrow(G,\cdot)$ este grup abelian.

b)

Injectivitatea: Fie $X_a,X_b\in G$ astfel încât $f(X_a)=f(X_b)\Rightarrow\ln(2a+1)=\ln(2b+1)\Rightarrow$ $\Rightarrow a=b\Rightarrow X_a=X_b$. Prin urmare functia f este injectivă. (0,25p)

Surjectivitatea: $\forall b\in\mathbf{R},\exists X_a\in G$ astfel încât $f(X_a)=b\Leftrightarrow a=\frac{e^b-1}{2}>-\frac{1}{2}$.

Deci $\exists X_a=X_{\frac{e^b-1}{2}}\in G$ astfel încât $f(X_a)=b$. (0,5p)

Morfismul: $f(X_a\cdot X_b)=f(X_{a+b+2ab})=\ln(4ab+2a+2b+1)=\ln(2a+1)(2b+1)=$
$=\ln(2a+1)+\ln(2b+1)=f(X_a)+f(X_b)$, $\forall X_a,X_b\in G$. (0,5p)

Deci f este izomorfism între grupurile $(G,\cdot)$ si $(\mathbf{R},+)$.

c) $X_a\cdot X_b=X_{a+b+2ab}=X_{2\left(a+\frac{1}{2}\right)\left(b+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}}$.

Se demonstrează prin inductie matematică relatia:

$$X_{a_1}\cdot X_{a_2}\cdot\ldots\cdot X_{a_n}=X_{2^{n-1}\left(a_1+\frac{1}{2}\right)\left(a_2+\frac{1}{2}\right)\ldots\left(a_n+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}}.$$

Atunci $X_{\frac{1}{2}}\cdot X_{\frac{3}{2}}\cdot\ldots\cdot X_{\frac{2n-1}{2}}=X_{\frac{2^n\cdot n!-1}{2}}$. (2p)

Obs. *Se poate folosi si punctul b)*

Din oficiu: 1 p

Problema 3

Calculati: $\int\frac{x+1-x^2\cdot\ln x}{x^3+x^2}\cdot\cos\left[\ln(x+1)\right]dx,\ x>0$.

Solutie:

$\int\frac{x+1-x^2\cdot\ln x}{x^2(x+1)}\cdot\cos\left[\ln(x+1)\right]dx=\int\frac{1}{x^2}\cdot\cos\left[\ln(x+1)\right]dx-\int\frac{\ln x}{x+1}\cdot\cos\left[\ln(x+1)\right]dx=$ (1p)

$$= \int \left(-\frac{1}{x}\right)' \cdot \cos\left[\ln(x+1)\right] dx - \int \ln x \cdot \left[\sin \ln(x+1)\right]' dx = \qquad (1p)$$

$$= -\frac{1}{x} \cdot \cos\left[\ln(x+1)\right] - \int \frac{1}{x} \cdot \sin \ln(x+1) \cdot \frac{1}{x+1} dx -$$

$$- \ln x \cdot \sin \ln(x+1) + \int \frac{1}{x} \cdot \sin \ln(x+1) dx = \qquad (1p)$$

$$= -\frac{1}{x} \cdot \cos\left[\ln(x+1)\right] - \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) \cdot \sin \ln(x+1) dx -$$

$$- \ln x \cdot \sin \ln(x+1) + \int \frac{1}{x} \cdot \sin \ln(x+1) dx = \qquad (1p)$$

$$= -\frac{1}{x} \cdot \cos\left[\ln(x+1)\right] - \int \frac{1}{x} \cdot \sin \ln(x+1) dx + \int \frac{1}{x+1} \cdot \sin \ln(x+1) dx -$$

$$- \ln x \cdot \sin \ln(x+1) + \int \frac{1}{x} \cdot \sin \ln(x+1) dx = \qquad (1p)$$

$$= -\frac{1}{x} \cdot \cos\left[\ln(x+1)\right] - \cos\left[\ln(x+1)\right] - \ln x \cdot \sin\left[\ln(x+1)\right] + C \qquad (1p)$$

Din oficiu: 1 p

Problema 4

Determinati primitivele functiei $f : [0, \pi] \to \mathbf{R}$ primitivabilă, care verifică relatia $f(x)\sin x - f(\pi - x) = \cos^2 x, \forall x \in [0, \pi]$.

Solutie:

Din relatia din enunt, pentru $x := \pi - x$, deducem: $f(\pi - x)\sin x - f(x) = \cos^2 x$. (1) (1p)

Din relatia din enunt, prin înmultire cu $\sin x$ deducem:

$f(x)\sin^2 x - f(\pi - x)\sin x = \sin x \cos^2 x$. (2) (1p)

Adunând (1) si (2), deducem $\left[1 + \sin x + f(x)\right] \cdot \cos^2 x = 0$. (3) (1p)

Din (3), obținem:

Caz 1. $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$. Din relatia din ipoteză se obtine $f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = a$. (0,5p)

Caz 2. Pentru $x \in [0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, $1 + \sin x + f(x) = 0$. (0,5p)

Astfel: $f(x) = \begin{cases} -1 - \sin x, & x \in [0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \\ a, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$, $a \in \mathbf{R}$. (0,5p)

Dacă $a \in \mathbf{R} \setminus \{-2\}$, f are punct de discontinuitate de speta I în $x = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ f nu are proprietatea lui Darboux si deci f nu admite primitive. (0,5p)

Conform enuntului, f admite primitive si deci $a = -2$ si prin urmare, $f(x) = -1 - \sin x$ pentru orice $x \in [0, \pi]$ si deci $F(x) = -x + \cos x + C$. (1p)

Din oficiu: 1 p

Pentru orice altă rezolvare corectă se acordă punctaj maxim

S.S.M.R - FILIALA MURES

Olimpiada de matematică
Faza locală 9.02.2013
Clasa a XII-a

Problema 1

Calculaţi: $\int \frac{1}{x\left(x^{2012}+2013\right)}dx,\ x>0$.

Gazeta matematică

Problema 2

Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ şi mulţimea:

$G=\left\{X_a\in M_2(\mathbf{R}) \mid X_a=I_2+aA,\ a>-\frac{1}{2}\right\}$.

a) Arătaţi că G este parte stabilă a lui $M_2(\mathbf{R})$ în raport cu înmulţirea. Stabiliţi, apoi, că $(G,\cdot)$ este grup abelian.

b) Demonstraţi că funcţia $f:G\to\mathbf{R},\ f(X_a)=\ln(2a+1)$ este izomorfism între grupurile $(G,\cdot)$ şi $(\mathbf{R},+)$.

c) Calculaţi $X_{\frac{1}{2}}\cdot X_{\frac{3}{2}}\cdot\ldots\cdot X_{\frac{2n-1}{2}}\ \left(n\in\mathbf{N}^*\right)$.

Problema 3

Calculaţi: $\int \frac{x+1-x^2\cdot\ln x}{x^3+x^2}\cdot\cos\left[\ln(x+1)\right]dx,\ x>0$.

Problema 4

Determinaţi primitivele funcţiei $f:[0,\pi]\to\mathbf{R}$ primitivabilă, care verifică relaţia $f(x)\sin x-f(\pi-x)=\cos^2 x,\ \forall x\in[0,\pi]$.

Notă:

Toate problemele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se notează cu 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.

Probleme propuse de: prof. Carmen Pop şi prof. Hecser Eniko