OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013
CLASA a VIII-a

SUBIECTUL I

a) Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$. Arătaţi că:

$$(x+y+z)^2+(x+y-z)^2+(x-y+z)^2+(-x+y+z)^2=4x^2+4y^2+4z^2$$

b) Demonstraţi că numărul $4024^2+4026^2+4028^2$ se poate scrie ca o sumă de patru numere naturale pătrate perfecte.

c) Dacă $a=2^{2013}$, $b=3^{2013}$ *şi* $c=6^{-2013}$, atunci arătaţi că:

$$\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}=1.$$

SUBIECTUL al II-lea

a) Să se demonstreze că $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca,\ \forall a,b,c \in \mathbb{R}$.

b) Demonstraţi că $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b} \ge \dfrac{(x+y)^2}{a+b}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ şi $\forall a,b \in \mathbb{R}_+$.

c) Arătaţi că $\dfrac{x^3}{y^2(x+2z)}+\dfrac{y^3}{z^2(y+2x)}+\dfrac{z^3}{x^2(z+2y)} \ge 1, \forall x, y, z \in \mathbb{R}_+$.

SUBIECTUL al III-lea

Pe planul dreptunghiului $ABCD$ se ridică perpendiculara MA. Distanţele AM, AB şi AD sunt direct proporţionale cu numerele $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, respectiv $\sqrt{6}$, iar distanţa de la punctul M la dreapta BD este egală cu $8\,cm$.

a) Aflaţi măsura unghiului dintre planele (MBD) şi (ABC).

b) Demonstraţi că dreapta BD şi $(MAD)\cap(MBC)$ sunt drepte necoplanare.

c) Aflaţi distanţa de la punctul C la planul (MBD).

SUBIECTUL al IV-lea

În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ notăm cu $M, N,$ respectiv $P,$ proiecţiile punctului C pe dreptele AB', AD', respectiv $B'D'$. Demonstraţi că:

a) AC', BD' *şi* $A'C$ sunt concurente.

b) $BM \perp AB'$.

c) Dreptele AP, $B'N$ şi $D'M$ sunt concurente.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii şi se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru: 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013
CLASA a VIII-a

SUBIECTUL I

a) Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$. Arătaţi că:

$$(x+y+z)^2+(x+y-z)^2+(x-y+z)^2+(-x+y+z)^2=4x^2+4y^2+4z^2$$

b) Demonstraţi că numărul $4024^2+4026^2+4028^2$ se poate scrie ca o sumă de patru numere naturale pătrate perfecte.

c) Dacă $a=2^{2013}, b=3^{2013}$ *şi* $c=6^{-2013}$, atunci arătaţi că:

$$\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}=1.$$

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

a) $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz$ şi

$(x+y-z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy-2yz-2xz$ ……….1 punct

Finalizare ....1 punct

b) $4024^2+4026^2+4028^2=4\left(2012^2+2013^2+2014^2\right)$ ……….1 punct

Conform subpunctului **a)**

$4\left(2012^2+2013^2+2014^2\right)=(2012+2013+2014)^2+(2012+2013-2014)^2+$

$+(2012-2013+2014)^2+(-2012+2013+2014)^2=6039^2+2011^2+2013^2+2015^2.$ ……….1 punct

c) $abc=2^{2013}\cdot 3^{2013}\cdot 6^{-2013}=1$ ……….1 punct

Amplifică prima fracţie cu c şi obţine

$$\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}=\frac{c}{abc+ac+c}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}$$ ……….1 punct

Amplifică a doua fracţie cu ac şi obţine

$$\frac{c}{1+ac+c}+\frac{ac}{c+abc+ac}+\frac{1}{ca+c+1}=\frac{ca+c+1}{ca+c+1}=1$$ ……….1 punct

Notă: Orice altă soluţie se punctează corespunzător.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013
CLASA a VIII-a

SUBIECTUL al II-lea

a) Să se demonstreze că $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca,\ \ \forall a,b,c \in \mathbb{R}$.

b) Demonstraţi că $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b} \geq \dfrac{(x+y)^2}{a+b}, \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$ şi $\forall a,b \in \mathbb{R}_+$.

c) Arătaţi că $\dfrac{x^3}{y^2(x+2z)}+\dfrac{y^3}{z^2(y+2x)}+\dfrac{z^3}{x^2(z+2y)} \geq 1, \forall x,y,z \in \mathbb{R}_+$.

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

a) $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca \Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2 \geq 2ab+2bc+2ca \Leftrightarrow$ ……….1 punct

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0,$ cu egalitate pentru $a=b=c$. ……….1 punct

b) $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b} \geq \dfrac{(x+y)^2}{a+b} \Leftrightarrow b(a+b)x^2+a(a+b)y^2 \geq ab(x+y)^2 \Leftrightarrow$ ……….1 punct

$\Leftrightarrow (bx-ay)^2 \geq 0$, cu egalitate pentru $bx=ay$. ……….1 punct

c) Conform subpunctului **b),** avem: $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b}+\dfrac{z^2}{c} \geq \dfrac{(x+y)^2}{a+b}+\dfrac{z^2}{c}$

Tot, conform subpunctului **b)**: $\dfrac{(x+y)^2}{a+b}+\dfrac{z^2}{c} \geq \dfrac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$ ……….1 punct

Am obţinut astfel inegalitatea: $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b}+\dfrac{z^2}{c} \geq \dfrac{(x+y+z)^2}{a+b+c} \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$ şi $\forall a,b,c \in \mathbb{R}_+$

şi aplicând-o, obţinem:

$$\frac{x^3}{y^2(x+2z)}+\frac{y^3}{z^2(y+2x)}+\frac{z^3}{x^2(z+2y)}=\frac{x^4}{xy^2(x+2z)}+\frac{y^4}{yz^2(y+2x)}+\frac{z^4}{zx^2(z+2y)} \geq \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{(xy+yz+zx)^2}$$ ..1 punct

Conform rezultatului enunţat la subpunctul **a),** $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{xy+xz+yz} \geq 1,\ \ \forall\, x,y,z \in \mathbb{R}_+$ şi finalizăm:

$$\frac{x^3}{y^2(x+2z)}+\frac{y^3}{z^2(y+2x)}+\frac{z^3}{x^2(z+2y)} \geq \left(\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+xz+yz}\right)^2 \geq 1, \forall x,y,z \in \mathbb{R}_+.$$ ……….1 punct

Notă: Orice altă soluţie se punctează corespunzător.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013
CLASA a VIII-a

SUBIECTUL al III-lea

Pe planul dreptunghiului $ABCD$ se ridică perpendiculara MA. Distanţele AM, AB şi AD sunt direct proporţionale cu numerele $\sqrt{2}, \sqrt{3}$, respectiv $\sqrt{6}$, iar distanţa de la punctul M la dreapta BD este egală cu $8\,cm$.

a) Aflaţi măsura unghiului dintre planele (MBD) şi (ABC).

b) Demonstraţi că dreapta BD şi $(MAD)\cap(MBC)$ sunt drepte necoplanare.

c) Aflaţi distanţa de la punctul C la planul (MBD).

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

a) $\frac{MA}{\sqrt{2}}=\frac{AB}{\sqrt{3}}=\frac{AD}{\sqrt{6}}=k$, unde $k\in\mathbb{R}_+ \Rightarrow MA=k\sqrt{2}; AB=k\sqrt{3}; AD=k\sqrt{6};$

Fie $AE\perp BD$, cu $E\in BD$. Din $MA\perp(ABC), AE\perp BD, AE, BD\subset(ABC)\Rightarrow ME\perp BD$ ……….1 punct

$$\left.\begin{array}{l}(MBD)\cap(ABC)=BD\\ ME\perp BD \text{ şi } ME\subset(MBD)\\ AE\perp BD \text{ şi } AE\subset(ABC)\end{array}\right\}\Rightarrow \sphericalangle[(MBD),(ABC)]=\sphericalangle(ME,AE)=\sphericalangle MEA.$$ ……….1 punct

$$\left.\begin{array}{l}\triangle MAE \text{ e dr. în } A\\ ME=AE=k\sqrt{2}\end{array}\right\}\Rightarrow m(\sphericalangle MEA)=45^\circ.$$ ……….1 punct

b) $M\in(MBC)\cap(MAD)\Rightarrow \exists\, g$, $a.î.$ $(MBC)\cap(MAD)=g$, cu condiţia $M\in g$;

$AD\parallel BC$, $AD\subset(MAD)$, $BC\subset(MBC)$, $(MBC)\cap(MAD)=g\Rightarrow g\parallel AD\parallel BC$ ……….1 punct

$g\parallel AD$, $AD\subset(ABC)$, $g\not\subset(ABC)\Rightarrow g\parallel(ABC)\Rightarrow g\cap(ABC)=\varnothing\Rightarrow g\cap BD=\varnothing\Rightarrow$

$\Rightarrow g\parallel BD$ sau g şi BD sunt drepte necoplanare ; Dar $D\notin g$, $AD\parallel g\Rightarrow BD\nparallel g$.

Deci g şi BD sunt drepte necoplanare ; ……….1 punct

c) $k=4\Rightarrow MA=4\sqrt{2}\,cm; AB=4\sqrt{3}\,cm; AD=4\sqrt{6}\,cm\Rightarrow AC=BD=12\,cm.$ Fie $AC\cap BD=\{O\}$.

În semispaţiul opus determinat de (ABC) şi M, prin C construim, $CT\parallel MA$, $a.î.$ $[CT]\equiv[MA]$ ...1 punct

Se arată că $MATC$ este paralelogram cu $MT\cap AC=\{O\}$. Din $MO\subset(MBD)$ şi $T\in MO\Rightarrow T\in(MBD)$.

Construim $CF\perp BD$, cu $F\in BD$, şi cu teorema celor trei perpendiculare, $TF\perp BD$.

Construim $CG\perp TF$, cu $G\in TF$ şi cu reciproca a II-a a teoremei celor trei perpendiculare,

$CG\perp(MBD)\Rightarrow d[C,(MBD)]=CG.$

$CT=CF=4\sqrt{2}\,cm;\ TF=8\,cm$ şi $CG=4\,cm.$ ....1 punct

Notă: Orice altă soluţie se punctează corespunzător.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013
CLASA a VIII-a

SUBIECTUL al IV-lea

În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ notăm cu $M, N,$ respectiv $P,$ proiecţiile punctului C pe dreptele $AB', AD',$ respectiv $B'D'$. Demonstraţi că:

a) AC', BD' *şi* $A'C$ sunt concurente.

b) $BM \perp AB'$.

c) Dreptele $AP, B'N$ şi $D'M$ sunt concurente.

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

a) $ABC'D'$ este paralelogram $\Rightarrow \exists\, O$ *a.î.* $AC' \cap BD' = \{O\}$, cu O mijlocul diagonalei $[BD']$ ....1 punct

$BCD'A'$ este paralelogram $\Rightarrow A'C$ trece prin O, mijlocul diagonalei $[BD']$ ....1 punct

b) Din $CB \perp (ABB'),\ AB' \subset (ABB') \Rightarrow CB \perp AB'$ ....1 punct

Din $AB' \perp BC,\ AB' \perp CM$ *şi* $BC \cap CM = \{C\} \Rightarrow AB' \perp (BCM)$

$AB' \perp (BCM)$ şi $BM \subset (BCM) \Rightarrow AB' \perp BM \Leftrightarrow BM \perp AB'$ ....1 punct

sau, direct:

Aplicând reciproca I a teoremei celor trei perpendiculare, din

$CB \perp (ABA'), CM \perp AB', BM, AB' \subset (ABB') \Rightarrow BM \perp AB'$

c) Analog, aplicând reciproca I a teoremei celor trei perpendiculare, obţinem $DN \perp AD'$ *şi* $C'P \perp B'D'$.

Fie $AB = a,\ BC = b\ BB' = c.$

Obţinem $AB' = \sqrt{a^2+c^2},\ AD' = \sqrt{b^2+c^2},\ B'D' = \sqrt{a^2+b^2}$

Cu teorema catetei, în $\triangle ABB'$, $AB^2 = AM \cdot AB' \Rightarrow AM = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+c^2}}$ şi ....1 punct

$B'M = \dfrac{c^2}{\sqrt{a^2+c^2}}$, de unde $\dfrac{AM}{B'M} = \dfrac{a^2}{c^2}$ ....1 punct

Analog $\dfrac{B'P}{D'P} = \dfrac{b^2}{a^2}$ şi $\dfrac{D'N}{AN} = \dfrac{c^2}{b^2}$. În $\triangle AB'D'$ avem $\dfrac{AM}{B'M} \cdot \dfrac{B'P}{D'P} \cdot \dfrac{D'N}{AN} = 1$. Conform reciprocei Teoremei lui Ceva, deducem că dreptele $AP, B'N$ şi $D'M$ sunt concurente. ....1 punct

Notă: Orice altă soluţie se punctează corespunzător.