Olimpiada naţională de matematică

Etapa locală, 15 februarie 2014

Clasa a VIII-a

1. a) Arătați că pentru orice valori naturale ale lui a avem $\sqrt{4a^2+4a+1}\in\mathbb{Q}$

   b) Arătați că există doar două valori naturale ale lui a pentru care $\sqrt{a^2+a+4}\in\mathbb{Q}$

   c) Arătați că nu există valori naturale ale lui a,b pentru $\sqrt{a^2+4b+2}\in\mathbb{Q}$

   Prof. Ovidiu Bădescu

2. a) Determinați $\left(\left(-\infty,3\right]\setminus\left(1,3\right)\right)\cap\left[1,3\right)$

   b) Determinați $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $\left[m,3m-2\right)\setminus\left(-\infty,m+1\right]=\varnothing$

   Prof. Ovidiu Bădescu

3. Se consideră un cub $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Planul determinat de A și de centrele pătratelor $A_1B_1C_1D_1$ și B_1C_1CB intersectează $\left[B_1C_1\right]$ în E. Calculați $\dfrac{B_1E}{C_1E}$.

   Viitorii olimpici.ro

4. În mijlocul D al ipotenuzei BC a triunghiului dreptunghic ABC se ridică perpendiculara DS pe planul triunghiului, unde S este arbitrar ales pe aceasta dreapta. Dacă se notează cu U şi V proiecțiile lui D pe planele (SAB), respectiv (SAC), demonstraţi că dreapta UV este paralelă cu planul (ABC) dacă şi numai dacă triunghiului ABC este dreptunghic isoscel.

   Prof. Camelia Pîrvu, Oraviţa

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.

Olimpiada naţională de matematică

Etapa locală, 15 februarie 2014

Clasa a VIII-a

Barem de evaluare

1. a) $\sqrt{4a^2+4a+1}=2a+1\in\mathbb{Q}$	(2p)
b) $a\in\{0,3\}$	(2p)
c) $a^2\in\{4k,4k+1\}\Rightarrow a^2+4b+2\in\{4k+2,4k+3\}$	(3p)
2. a) $(-\infty,3]\setminus(1,3)=(-\infty,1]\cup\{3\}$	(1p)
$((-\infty,1]\cup\{3\})\cap[1,3)=\{1\}$	(1p)
b) $m<3m-2\Rightarrow m>1$	(2p)
$3m-2\le m+1\Rightarrow m\le\frac{3}{2}$	(2p)
$m\in\left(1,\frac{3}{2}\right]$	(1p)
3. Fie O centrul $ABCD$, O_1 centrul $A_1B_1C_1D_1$, O_2 centrul lui B_1C_1CB și $AO_1\cap CC_1=\{M\}$ rezultă că $\{E\}=MO_2\cap B_1C_1$	(1p)
Fie $\{F\}=MO_2\cap BC\Rightarrow\frac{O_1C_1}{AC}=\frac{1}{2}=\frac{MC_1}{MC}=\frac{EC_1}{FC}$	(3p)
$\Delta EO_2C_1\equiv\Delta FO_2B,\Delta EO_2B_1\equiv\Delta FO_2C\Rightarrow\frac{B_1E}{C_1E}=2$	(3p)
4. $\Rightarrow$ M şi N mijloacele catetelor (AB) şi (AC), obține $\frac{SU}{SM}=\frac{SV}{SN}$	(2p)
Folosind teorema catetei obține $SM\equiv SN\Rightarrow\Delta ABC$ dreptunghic isoscel	(2p)
$\Leftarrow$ $(SM)\equiv(SN),(SU)\equiv(SV)\Rightarrow$ concluzia	(3p)