OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 20.02.2016

Clasa a VIII-a

1. Se consideră numărul $a=\sqrt{7+\sqrt{13}}-\sqrt{7-\sqrt{13}}$.

a) Demonstrați că numărul a^2 este număr natural. ***3 puncte***

b) Calculați $(a^3-2a-1)^{2016}$. ***4 puncte***

2. Determinați numerele reale x,y,z știind că x+y+z=$\frac{3}{2}$ și $x^2+y^2+z^2=\frac{3}{4}$

7 puncte

Gazeta Matematică 10/2015

3. Fie triunghiul ABC dreptunghic în A, iar punctul M este exterior planului ABC astfel încât $MB\perp AB$ și $MC\perp AC$. Fie N , P , E mijloacele segmentelor [MA], [BC] și respectiv [AC]. Demonstrați că :

a) PN$\perp$(ABC) ***4 puncte***

b) $4\cdot PN^2=MB^2-AC^2$. ***3 puncte***

4. Pe planul dreptunghiului ABCD, cu AB=4 cm și BC=8 cm, se ridică perpendiculara EA. Fie BM$\perp$EC și DN$\perp$EC, M,N$\in$(EC). Dacă MN= 3 cm, să se calculeze lungimea segmentului EC.

7 puncte

Subiectele au fost propuse de:
Prof. Cucu Anca - Șc. Gimnazială „Ion Basgan” Focșani
Prof. Seceleanu Andrei - Șc. Gimnazială Vânători

NOTĂ: **Timp de lucru: 3 ore.**
Nu se acordă puncte din oficiu.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 20.02.2016

Clasa a VIII-a

Barem de corectare şi notare

1.a) $a^2 = (\sqrt{7+\sqrt{13}} - \sqrt{7-\sqrt{13}})^2 = 7+\sqrt{13} - 2\cdot\sqrt{7+\sqrt{13}}\cdot\sqrt{7-\sqrt{13}} + 7 - \sqrt{13} =$ .... 1 punct

$= 14 - 2\cdot\sqrt{7^2 - \sqrt{13}^2} = 14 - 2\cdot 6 = 2 \in \mathbb{N}$ .... 2 puncte

b) $a^3 - 2\cdot a = a\cdot(a^2 - 2) = a\cdot 0 = 0$ .... 2 puncte

Deci $(a^3 - 2\cdot a - 1)^{2016} = (-1)^{2016} = 1$ .... 2 puncte

2. $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2\cdot(xy+xz+yz)$ .... 1 punct

$\frac{9}{4} = \frac{3}{4} + 2\cdot(xy+xz+yz) \Rightarrow xy+xz+yz = \frac{3}{4}$ .... 1 punct

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz=0$ .... 1 punct

$\Rightarrow 2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2yz=0$ .... 2 puncte

$\Rightarrow (x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2=0$ .... 1 punct

$x=y=z=\frac{1}{2}$ .... 1 punct

3.a) ΔMBA, $m(\sphericalangle MBA) = 90^0$ și BN – mediană $\Rightarrow BN = \frac{MA}{2}$. Analog $\Delta MCA \Rightarrow CN = \frac{MA}{2}$.

Deci ΔBNC - isoscel, NP - mediană$\Rightarrow$NP - înălțime$\Rightarrow NP \perp BC$ .... 1 punct

ΔMCA,NE – linie mijlocie $\Rightarrow NE \parallel MC \Rightarrow NE \perp AC$ (1)

Analog $\Delta ABC \Rightarrow PE \perp AC$ (2) .... 1 punct

Din (1) și (2) se obține $AC \perp (PNE)$ și PN$\subset$(PNE) $\Rightarrow$AC$\perp$PN .... 1 punct

Deci $NP \perp BC$, NP$\perp$AC$\Rightarrow$ NP$\perp$(ABC) .... 1 punct

b) $\Delta NPB, m(\sphericalangle NPB) = 90^0$ (teorema lui Pitagora) $\Rightarrow PN^2 = BN^2 - BP^2$ .... 1 punct

$\Rightarrow PN^2 = \dfrac{AM^2}{4} - \dfrac{BC^2}{4}$ .... 1 punct

$\Rightarrow 4 \cdot NP^2 = (MB^2 + AB^2) - (AB^2 + AC^2) = MB^2 - AC^2$ .... 1 punct

4. EA $\perp$ (ABC), AB $\perp$ BC $\Rightarrow$(T3 $\perp$) $\Rightarrow$EB $\perp$ BC .... 1 punct

Analog ED $\perp$ DC .... 1 punct

ΔEBC (teorema catetei) $\Rightarrow BC^2 = CM \cdot EC$ .... 1 punct

ΔEDC (teorema catetei) $\Rightarrow CD^2 = CN \cdot EC$ .... 1 punct

$BC^2 - CD^2 = EC \cdot (CM - CN) = EC \cdot MN$ .... 2 puncte

$48 = 3 \cdot EC \Rightarrow EC = 16cm$ .... 1 punct

NOTĂ. Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.