Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Locală - 22 februarie 2014 - Maramureş

Clasa a VIII-a

SUBIECTUL I

a) Arătaţi că $(x^2+x+1)(x^3-x+1)=x^5+x^4+1$, pentru oricare număr real x.

b) Să se arate că numărul $A=2014^{15}+2014^{12}+1$ nu este număr prim.

(matematician Râmbu Gheorghe)

SUBIECTUL II

Arătaţi că, dacă $a<2$ şi $b>2$ sunt numere reale, atunci $\frac{a^2+5}{a-2}-\frac{b^2+5}{b-2}\leq -12$.

(Gazeta Matematică nr. 11/2013)

SUBIECTUL III

Fie O şi O' centrele feţelor $ABCD$, respectiv $BCC'B'$ ale cubului $ABCDA'B'C'D'$, $AB=a$.

a) Aflaţi măsura unghiului dreptelor $D'O$ şi $A'O'$.

b) Calculaţi distanţa de la punctul O' la planul $(D'AC)$.

(prof. Bunu Iulian, Liceul de Arte Baia Mare)

SUBIECTUL IV

Fie rombul $ABCD$, cu $AB=a$ şi $m(\angle A)=60°$. De aceeaşi parte a planului (ABC) se ridică perpendicularele AF şi CE astfel încât $AF=CE=c$. Fie $\alpha=m(\angle(AC;BE))$ şi $\beta=m(\angle((BFE);(ABC)))$.

a) Calculaţi $\cos\alpha$ şi $\cos\beta$.

b) Arătaţi că, pentru oricare $c>0$, avem $tg\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

(matematician Râmbu Gheorghe)

Timp de lucru 3 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Subiecte selectate şi prelucrate de:

prof. Bunu Iulian – Lic. Artă Baia Mare, prof. Pop Radu – Lic. T. Sanitar Baia Mare,

matematician Râmbu Gheorghe

BAREM – CLASA A VIII-A

SUBIECTUL I

a) Arătaţi că $\left(x^2+x+1\right)\left(x^3-x+1\right)=x^5+x^4+1$, pentru oricare număr real x.

b) Să se arate că numărul $A=2014^{15}+2014^{12}+1$ nu este număr prim.

Barem. a) 2 p

b) $A=\left(2014^3\right)^5+\left(2014^3\right)^{12}+1$	2 p
$A=\left(2014^6+2014^3+1\right)\left(2014^9-2014+1\right)$	2 p
Finalizare: A este număr compus, deci nu este prim	1 p

SUBIECTUL II

Arătaţi că, dacă $a<2$ şi $b>2$ sunt numere reale, atunci $\dfrac{a^2+5}{a-2}-\dfrac{b^2+5}{b-2}\le -12$.

Barem. Notăm $a-2=x<0$ şi $b-2=y>0$	1 p
Inegalitatea devine $x^2y-xy^2+9y-9x+12xy\ge 0$	2 p
Obţinem $y(x+3)^2-x(y-3)^2\ge 0$	3 p
Finalizare:	1 p

SUBIECTUL III

Fie O şi O' centrele feţelor $ABCD$, respectiv $BCC'B'$ ale cubului $ABCDA'B'C'D'$, $AB=a$.

a) Aflaţi măsura unghiului dreptelor $D'O$ şi $A'O'$.

b) Calculaţi distanţa de la punctul O' la planul $(D'AC)$.

Barem. a) Fie O'' centrul lui $A'B'C'D$. Deducem $O''B // D'O$.	0,5 p
Fie M mijlocul lui $O'C'$. Deducem $O''M // A'O'$.	0,5 p
Măsura unghiului dreptelor $D'O$ şi $A'O'$ este $m(\angle BO''M)$.	0,5 p
Triunghiul $A'BC'$ echilateral $\Rightarrow$ $A'O' \perp BC'$	0,5 p
$\Rightarrow$ $O''M // A'O'$ şi $O''M \perp BC'$	1 p
$\Rightarrow m(\angle BO''M)=60^\circ$	1 p
b) Dacă $pr_{(D'AC)}B'=E,\ pr_{(D'AC)}O'=F \Rightarrow O'F=\dfrac{1}{2}B'E$	1 p
Află $B'E=\dfrac{2\sqrt{3}a}{3}$	1,5 p
Finalizare: $O'F=d\left(O';(D'AC)\right)=\dfrac{\sqrt{3}a}{3}$.	0,5 p

SUBIECTUL IV

Fie rombul $ABCD$, cu $AB = a$ şi $m(\angle A) = 60^\circ$. De aceeaşi parte a planului (ABC) se ridică perpendicularele AF şi CE astfel încât $AF = CE = c$. Fie $\alpha = m(\angle(AC; BE))$ şi $\beta = m(\angle((BFE);(ABC)))$.

a) Calculaţi $\cos\alpha$ şi $\cos\beta$.

b) Arătaţi că, pentru oricare $c > 0$, avem $tg\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Barem. a) Fie d // AC, deci $\alpha = m(\angle(BM; BE))$. 1 p

$BE = \sqrt{a^2 + c^2}$ 0,5 p

Cu $CM \perp d$ şi $T3\perp$, avem $EM \perp d$, deci $\beta = m(\angle(EM; CM)) = m(\angle CME)$. 1 p

$ME = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4c^2}$, $BM = \frac{\sqrt{3}a}{2}$, $CM = \frac{a}{2}$. 1,5 p

$\cos\alpha = \frac{BM}{BE} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{a^2 + c^2}}$. 0,5 p

$\cos\beta = \frac{CM}{ME} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 4c^2}}$ 0,5 p

b) $tg\alpha = \frac{ME}{BM} = \frac{\sqrt{a^2 + 4c^2}}{a\sqrt{3}}$. 1 p

$tg\alpha \cdot \cos\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 4c^2}} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + 4c^2}}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. 1 p