Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

22 februarie 2015

Clasa a X-a

Problema 1.

Să se rezolve în mulţimea numerelor reale inecuaţiile:

a). $\log_x\left(\frac{2x-5}{2x-4}\right)<0$

b). $x+\log_2\left(9-2^x\right)<3$

Problema 2.

Fie z şi w numere complexe nenule cu argumente diferite, astfel încât $|z|=|w|$ şi $|z+1|=|w+1|$. Să se demonstreze că $z=\overline{w}$.

Problema 3.

Fie $t>1,\ a,\ b>0.$ Să se demonstreze inegalitatea: $t^{a^2\cdot b}+t^b+t^{\frac{1}{b}}\geq t+t^a+t^{a\cdot b}.$

Problema 4.

Fie triunghiul ABC, iar $z_1, z_2, z_3\in\mathbb{C}$ sunt afixele punctelor A, B, respectiv C.

Să se demonstreze că :

a). Dacă $z_3-z_1=\omega\cdot\left(z_2-z_1\right)$ sau $z_3-z_1=\overline{\omega}\cdot\left(z_2-z_1\right)$, atunci triunghiul ABC este echilateral, unde $\omega=\cos\frac{\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{\pi}{3}$.

b). Dacă $z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1\cdot z_2+z_2\cdot z_3+z_3\cdot z_1$, atunci triunghiul ABC este echilateral.

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

22 februarie 2015

Clasa a X-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. probleme	Soluţie, rezolvare	Punctaj
1.	a). Condiţii: $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ \dfrac{2x-5}{2x-4}>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(0,\infty)-\{1\} \\ x\in(-\infty,2)\cup\left(\dfrac{5}{2},\infty\right) \end{cases} \Rightarrow x\in(0,1)\cup(1,2)\cup\left(\dfrac{5}{2},\infty\right)$	**1p**
	Cazul 1. $x\in(0,1)$ Inecuaţia devine $\dfrac{2x-5}{2x-4}>1 \Leftrightarrow \dfrac{-1}{2x-4}>0 \Leftrightarrow x<2;$ $\begin{cases} x<2 \\ x\in(0,1) \end{cases} \Rightarrow x\in(0,1)$	**1p**
	Cazul 2. $x\in(1,2)\cup\left(\dfrac{5}{2},\infty\right)$ Inecuaţia devine $\dfrac{2x-5}{2x-4}<1 \Leftrightarrow \dfrac{-1}{2x-4}<0 \Leftrightarrow x>2$ $\begin{cases} x>2 \\ x\in(1,2)\cup\left(\dfrac{5}{2},\infty\right) \end{cases} \Rightarrow x\in\left(\dfrac{5}{2},\infty\right);$ Soluţia : $x\in(0,1)\cup\left(\dfrac{5}{2},\infty\right).$	**1p**

	b). Condiţii: $9-2^x>0 \Leftrightarrow x<\log_2 9$; Rezolvare: $x+\log_2\left(9-2^x\right)<3 \Leftrightarrow 9-2^x<2^{3-x}$; Notăm $2^x=y, y>0$; $9-2^x<2^{3-x} \Leftrightarrow y^2-9y+8>0 \Leftrightarrow y\in(0,1)\cup(8,\infty) \Leftrightarrow 2^x\in(0,1)\cup(8,\infty) \Leftrightarrow$ $2^x<1$ sau $2^x>8 \Leftrightarrow$ $\begin{cases} x<\log_2 9 \\ x\in(-\infty,0)\cup(3,\infty)\end{cases} \Rightarrow x\in(-\infty,0)\cup(3,\log_2 9)$ Soluţia este $x\in(-\infty,0)\cup(3,\log_2 9)$.	**1p** **2p** 1p
2.	**Metoda 1**. Fie r=$\lvert z\rvert=\lvert w\rvert \Rightarrow z\cdot\overline{z}=r^2=w\cdot\overline{w}$; $\lvert 1+z\rvert=\lvert 1+w\rvert \Rightarrow \lvert 1+z\rvert^2=\lvert 1+w\rvert^2 \Rightarrow (1+z)\cdot\left(1+\overline{z}\right)=(1+w)\cdot\left(1+\overline{w}\right)\Rightarrow$ $1+z+\overline{z}+z\cdot\overline{z}=1+w+\overline{w}+w\cdot\overline{w}\Rightarrow z+\overline{z}=w+\overline{w}\Rightarrow z-w+\frac{r^2}{z}-\frac{r^2}{w}=0\Rightarrow$ $(z-w)+\frac{r^2\cdot(w-z)}{z\cdot w}=0\Rightarrow(z-w)\cdot\left(z\cdot w-r^2\right)=0.$ Dar z $\neq$ w pentru că au argumente diferite. Aşadar, z=$\frac{r^2}{w}=\overline{w}$.	**2p** **2p** **1p** **1p** **1p**
	Metoda 2. Fie $z=a+b\cdot i,\ w=c+d\cdot i,\ a,c\in\mathbb{R},\ b,d\in\mathbb{R}^*, z\neq w.$ $\left.\begin{array}{l}\lvert z\rvert=\lvert w\rvert \Leftrightarrow a^2+b^2=c^2+d^2 \\ \lvert z+1\rvert=\lvert w+1\rvert \Leftrightarrow (a+1)^2+b^2=(c+1)^2+d^2\end{array}\right\}\Rightarrow a=c$ şi $b^2=d^2$ $a=c\ si\ b=d\Rightarrow z=w-nu\ convine$ $z\neq w\Rightarrow\begin{cases}a=c\\ b=-d\end{cases}\Rightarrow z=\overline{w}.$	
	Metoda 3. Fie $z=r\cdot(\cos u+i\sin u),\ w=r\cdot(\cos v+i\sin v),\ u\neq v$; $\lvert 1+z\rvert=\lvert 1+w\rvert \Leftrightarrow \lvert 1+r\cdot(\cos u+i\sin u)\rvert=\lvert 1+r\cdot(\cos v+i\sin v)\rvert \Leftrightarrow$ $(1+r\cos u)^2+r^2\cdot\sin^2 u=(1+r\cos v)^2+r^2\cdot\sin^2 v\Leftrightarrow$ $\cos u=\cos v\Leftrightarrow u=\pm v+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$; Convine $u=-v+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\Rightarrow z=\overline{w}.$	

3.	Se aplică inegalitatea mediilor: $\frac{t^{a^2\cdot b}+t^b}{2}\geq t^{\frac{1}{2}\cdot\left(a^2\cdot b+b\right)}$; Dar $\frac{1}{2}\cdot\left(a^2\cdot b+b\right)\geq a\cdot b\Rightarrow\frac{t^{a^2\cdot b}+t^b}{2}\geq t^{a\cdot b}$; La fel $\frac{t^{a^2\cdot b}+t^{\frac{1}{b}}}{2}\geq t^{\frac{1}{2}\cdot\left(a^2\cdot b+\frac{1}{b}\right)}\geq t^a$; $\frac{t^b+t^{\frac{1}{b}}}{2}\geq t^{\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)}\geq t$; Am obţinut $\begin{cases}\frac{t^{a^2\cdot b}+t^b}{2}\geq t^{a\cdot b}\\ \frac{t^{a^2\cdot b}+t^{\frac{1}{b}}}{2}\geq t^a\\ \frac{t^b+t^{\frac{1}{b}}}{2}\geq t\end{cases}$ Adunând aceste inegalitaţi, se obţine inegalitatea din enunţ.	1p 2p 2p 1p 1p
4.	a). Fie $z_3-z_1=\omega\cdot\left(z_2-z_1\right)\Rightarrow\left\|z_3-z_1\right\|=\left\|z_2-z_1\right\|\Rightarrow AC=AB\ (1)$ $z_3-z_1=\omega\cdot\left(z_2-z_1\right)\overset{-z_2+z_1}{\Rightarrow}z_3-z_2=\left(\omega-1\right)\cdot z_2-\left(\omega-1\right)\cdot z_1\Rightarrow$ $z_3-z_2=\left(\omega-1\right)\cdot\left(z_2-z_1\right)\Rightarrow\left\|z_3-z_2\right\|=\left\|z_2-z_1\right\|\Rightarrow BC=AB(2)$ Din (1)şi(2) rezultă că triunghiul ABC este echilateral.	1p 1p 1p
	b).**Metoda1.** $\left[z_3-z_1-\omega\cdot\left(z_2-z_1\right)\right]\cdot\left[z_3-z_1-\overline{\omega}\cdot\left(z_2-z_1\right)\right]=$ $=\left(z_3-z_1\right)^2-\left(z_3-z_1\right)\cdot\left(z_2-z_1\right)\cdot\left(\omega+\overline{\omega}\right)+\left(z_2-z_1\right)^2=$ $\left(z_3-z_1\right)^2-\left(z_3-z_1\right)\cdot\left(z_2-z_1\right)+\left(z_2-z_1\right)^2=$ $z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_1\cdot z_2+z_2\cdot z_3+z_3\cdot z_1=0\Rightarrow$ $z_3-z_1-\omega\cdot\left(z_2-z_1\right)=0\ sau\ z_3-z_1-\overline{\omega}\cdot\left(z_2-z_1\right)=0\Rightarrow$ triunghiul ABC este echilateral. **Metoda 2.**	

	$z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1\cdot z_2+z_2\cdot z_3+z_3\cdot z_1 \Leftrightarrow (z_1-z_2)^2+(z_3-z_2)^2+(z_1-z_3)^2=0$ Notăm $z_1-z_2=a,\ z_2-z_3=b,$ iar relaţia de mai sus devine: $a^2+b^2+(a+b)^2=0 \Leftrightarrow a^2+b^2+a\cdot b=0 \Rightarrow$ $a_{1,2}=\dfrac{-b\pm bi\sqrt{3}}{2}=\dfrac{b\cdot\left(-1\pm i\sqrt{3}\right)}{2}\Rightarrow$ $\lvert a\rvert=\lvert b\rvert \Rightarrow \lvert z_1-z_2\rvert=\lvert z_3-z_2\rvert \Rightarrow AB=BC.$ La fel se demonstrează că AC=BC. Metoda 3. $z_1^2+z_2^2+z_3^2-z_1\cdot z_2-z_2\cdot z_3-z_3\cdot z_1=0 \Leftrightarrow$ $z_1^2-(z_2+z_3)\cdot z_1+z_2^2+z_3^2-z_2\cdot z_3=0;$ $\Delta=(z_2+z_3)^2-4\cdot\left(z_2^2+z_3^2-z_2\cdot z_3\right)=-3\cdot(z_2-z_3)^2$ $z_1=\dfrac{z_2+z_3\pm i\cdot(z_2-z_3)\sqrt{3}}{2}\Rightarrow$ $z_1-z_2=\dfrac{z_3-z_2\pm i\cdot(z_2-z_3)\sqrt{3}}{2}=(z_2-z_3)\cdot\dfrac{-1\pm i\cdot\sqrt{3}}{2}\Rightarrow$ $\lvert z_1-z_2\rvert=\lvert z_2-z_3\rvert \Rightarrow AB=BC;$ Analog, obţinem AC=BC.	**2p** 1p 1p