



---

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**

**Etapa locală, 14 februarie 2014**

**Clasa a VI-a**

**PROBLEMA 1**

Aflați numerele naturale  $a$  și  $b$  știind că  $[a,b]$  este de 15 ori mai mare decât  $(a,b)$  și  $5a + 3b = 150$ . Am notat cu  $[a,b]$  cel mai mic multiplu comun și cu  $(a,b)$  cel mai mare divizor comun al numerelor  $a$  și  $b$ .

**PROBLEMA 2**

a) Fie numerele  $a = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{2013}{2014}$  și  $b = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2014}$ . Arătați că  $\frac{a+b}{3} \in \mathbb{N}$ .

b) Calculați  $S = 7 + 14 + 21 + \dots + 364$  și arătați că  $53 | S$ .

**PROBLEMA 3**

Cu 6 ani în urmă vârsta fiicei era egală cu 0,2 din vârsta mamei, iar peste 9 ani vârsta fiicei va fi 0,5 din vârsta pe care o va avea mama. Câți ani are fiecare în prezent?

**PROBLEMA 4**

Dreptele  $AB$  și  $CD$  sunt concurente în  $O$ . Știind că semidreptele  $[OM, [OT, [OR$

sunt bisectoarele unghiurilor  $BOD$ ,  $DOM$  și respectiv  $COB$ , iar  $m(\angle AOM) = 130^\circ$ , calculați:

a)  $m(\angle ROM)$  și  $m(\angle AOD)$ ;

b) măsura unghiului dintre bisectoarele unghiurilor  $AOC$  și  $BOR$ .

*Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 2 ore. Punctajul maxim acordat pentru fiecare problemă este de 7 puncte.*



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**

**Etapa locală, 14 februarie 2014**

**Clasa a VI-a**

**Barem de evaluare și notare**

**PROBLEMA 1**

Aflați numerele naturale  $a$  și  $b$  știind că  $[a, b]$  este de 15 orimai mare decât  $(a, b)$  și  $5a + 3b = 150$ . Am notat cu  $[a, b]$  cel mai mic multiplu comun și cu  $(a, b)$  cel mai mare divizor comun al numerelor  $a$  și  $b$ .

*Gazeta Matematică*

**Soluție:**

Fie  $(a, b) = d$ , atunci  $a = d \cdot x$ ,  $b = d \cdot y$ , unde  $x, y \in \mathbb{N}$  și  $(x, y) = 1$  ..... 1 punct

Din  $a \cdot b = (a, b) \cdot [a, b]$  și  $[a, b] = 15 \cdot d$ , obținem  $d \cdot x \cdot d \cdot y = 15 \cdot d^2$  ..... 2 puncte

$x \cdot y = 15 \Rightarrow (x, y) \in \{(1, 15); (15, 1); (3, 5); (5, 3)\}$  ..... 2 puncte

Prin înlocuire în relația  $5a + 3b = 150$  obținem  $d \in \{3, 5\}$  ..... 1 punct

Finalizare:  $(a, b) \in \{(3, 45); (15, 45)\}$  ..... 1 punct

**PROBLEMA 2**

a) Fie numerele  $a = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{2013}{2014}$  și  $b = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2014}$ . Arătați că

$$\frac{a+b}{3} \in \mathbb{N}.$$

b) Calculați  $S = 7 + 14 + 21 + \dots + 364$  și arătați că  $53 \mid S$ .

**Soluție:**

a)  $a + b = \frac{2}{2} + \frac{3}{3} + \frac{4}{4} + \dots + \frac{2014}{2014} = \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{\text{de } 2013 \text{ ori}} = 2013 = 3 \cdot 671$  ..... 3 puncte

$\frac{a+b}{3} = 671 \in \mathbb{N}$  ..... 1 punct

b)  $S = 7 + 14 + 21 + \dots + 364 = 7 \cdot \frac{52 \cdot 53}{2}$  ..... 2 puncte

finalizare  $S = 963613$  ..... 1 punct

### PROBLEMA 3

Cu 6 ani în urmă vârsta fiicei era egală cu 0,2 din vârsta mamei, iar peste 9 ani vârsta fiicei va fi 0,5 din vârsta pe care o va avea mama. Câți ani are fiecare în prezent?

#### Soluție:

Stabilirea necunoscutelor:  $f$  - vârsta fiicei în prezent și  $m$  - vârsta mamei în prezent și formarea relațiilor

$$f - 6 = 0,2 \cdot (m - 6) \text{ și } f + 9 = 0,5 \cdot (m + 9) \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

Exprimăm necunoscuta  $f$  din ambele relații  $f = \frac{m-6}{5} + 6$  respectiv  $f = \frac{m+9}{2} - 9 \dots\dots 2$   
puncte

$$\text{Egalând obținem } \frac{m-6}{5} + 6 = \frac{m+9}{2} - 9 \Rightarrow m = 31 \text{ ani } \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$\text{Deci } f = \frac{m-6}{5} + 6 = 11 \text{ ani } \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

### PROBLEMA 4

Dreptele  $AB$  și  $CD$  sunt concurente în  $O$ . Știind că semidreptele  $[OM, [OT, [OR$  sunt bisectoarele unghiurilor  $\angle BOD, \angle DOM$  și respectiv  $\angle COB$ , iar  $m(\angle AOM) = 130^\circ$ ,

calculați:

a)  $m(\angle ROM)$  și  $m(\angle AOD)$ ;

b) măsura unghiului dintre bisectoarele unghiurilor  $\angle AOC$  și  $\angle BOR$ .

#### Soluție:

a)

Desen.....1punct

$$m(\angle ROM) = 90^\circ \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$m(\angle AOD) = 30^\circ \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

b) Notarea bisectoarelor și explicare .....2 puncte

$$\angle AOC \equiv \angle DOB \text{ (opuse la vârf)} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

Finalizare .....1punct