OLIMPIADA DE MATEMATICĂ – ETAPA PE MUNICIPIU
5 MARTIE 2016 - CLASA aVIII-a

Subiectul I (7p)

Determinați intervalul $[a\,;b\,] \subset R$ știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

a) $[a\,;b\,] \cap Z = \varnothing$;   b) $|b-a-1| = a^2+b^2+\frac{a}{2}-2b+\frac{21}{16}$

Subiectul II (7p)

a) Un număr se numește **special** dacă există m, $n \in Z^*$ astfel încât $S = m^2 + 2n^2$.

Demonstrați că produsul a două numere **speciale** este un număr **special.**

b) Numerele a, $b \in R^*$, $a^2 \neq b^2$ verifică relația: $\frac{2a}{a+b} + \frac{b}{a-b} = 2.$

Demonstrați că $\frac{668a+b}{a-2b} \in N^*$.

Subiectul III (7p)

Se dă pătratul ABCD și pătratul CDEF situate în plane perpendiculare cu AB = a, iar M, N, P, Q sunt mijloacele segmentelor [AB], [BC], [AD] respectiv [EF].

a) Să se arate că $MQ \perp NP$ și $MP \perp PQ$.

b) Determinați $tg\alpha$ unde α este măsura unghiului dintre planele (MPQ) și (CDF).

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ – ETAPA PE MUNICIPIU
5 MARTIE 2016 - CLASA aVIII-a

Subiectul I (7p)

Determinați intervalul $[a\,;b\,] \subset R$ știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

a) $[a\,;b\,] \cap Z = \emptyset$; b) $|b-a-1| = a^2+b^2+\frac{a}{2}-2b+\frac{21}{16}$

Subiectul II (7p)

a) Un număr se numește **special** dacă există m, n $\in Z^*$ astfel încât $S = m^2 + 2n^2$.

Demonstrați că produsul a două numere **speciale** este un număr **special**.

b) Numerele a, b $\in R^*$, $a^2 \neq b^2$ verifică relația: $\frac{2a}{a+b}+\frac{b}{a-b}=2$.

Demonstrați că $\frac{668a+b}{a-2b} \in N^*$.

Subiectul III (7p)

Se dă pătratul ABCD și pătratul CDEF situate în plane perpendiculare cu AB = a, iar M, N, P, Q sunt mijloacele segmentelor [AB], [BC], [AD] respectiv [EF].

3p. a) Să se arate că MQ ⊥ NP și MP ⊥ PQ.

3p. b) Determinați tgα unde α este măsura unghiului dintre planele (MPQ) și (CDF).

fig. 1p.

Barem rezolvare clasa a VIII a:

Subiectul I

Din $[a;b] \cap \mathbb{Z} = \emptyset \Rightarrow b-a < 1 \Rightarrow$

$= |b-a-1| = -b+a+1$ ------------ 2p

Din b) $\Rightarrow a^2+b^2-\frac{a}{2}-b+\frac{5}{16}=0$ ----- 1p

$\left(a-\frac{1}{4}\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=\frac{1}{4} \\ b=\frac{1}{2}\end{array}\right\}$ --- 3p

Intervalul este $\left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$ ------------ 1p

Subiectul II.

a) $(m^2+2n^2)(a^2+2b^2)=m^2a^2+2m^2b^2+2n^2a^2+4n^2b^2$ - 1p

$= m^2a^2+2m^2b^2+2n^2a^2+4n^2b^2+4mabn-4mabn$ 1p

$m^2a^2+4mabn+4n^2b^2+2(m^2b^2+n^2a^2-2mabn)$ - 1p

$\underbrace{(ma+2nb)^2+2(mb-na)^2}_{\text{nr. special.}}$ -- 1p.

b) Din $\frac{2a}{a+b}+\frac{b}{a-b}=2 \Rightarrow a=3b$ --- 1p

$\frac{668a+b}{a-2b}=2005 \in \mathbb{N}$ ---- 1p.

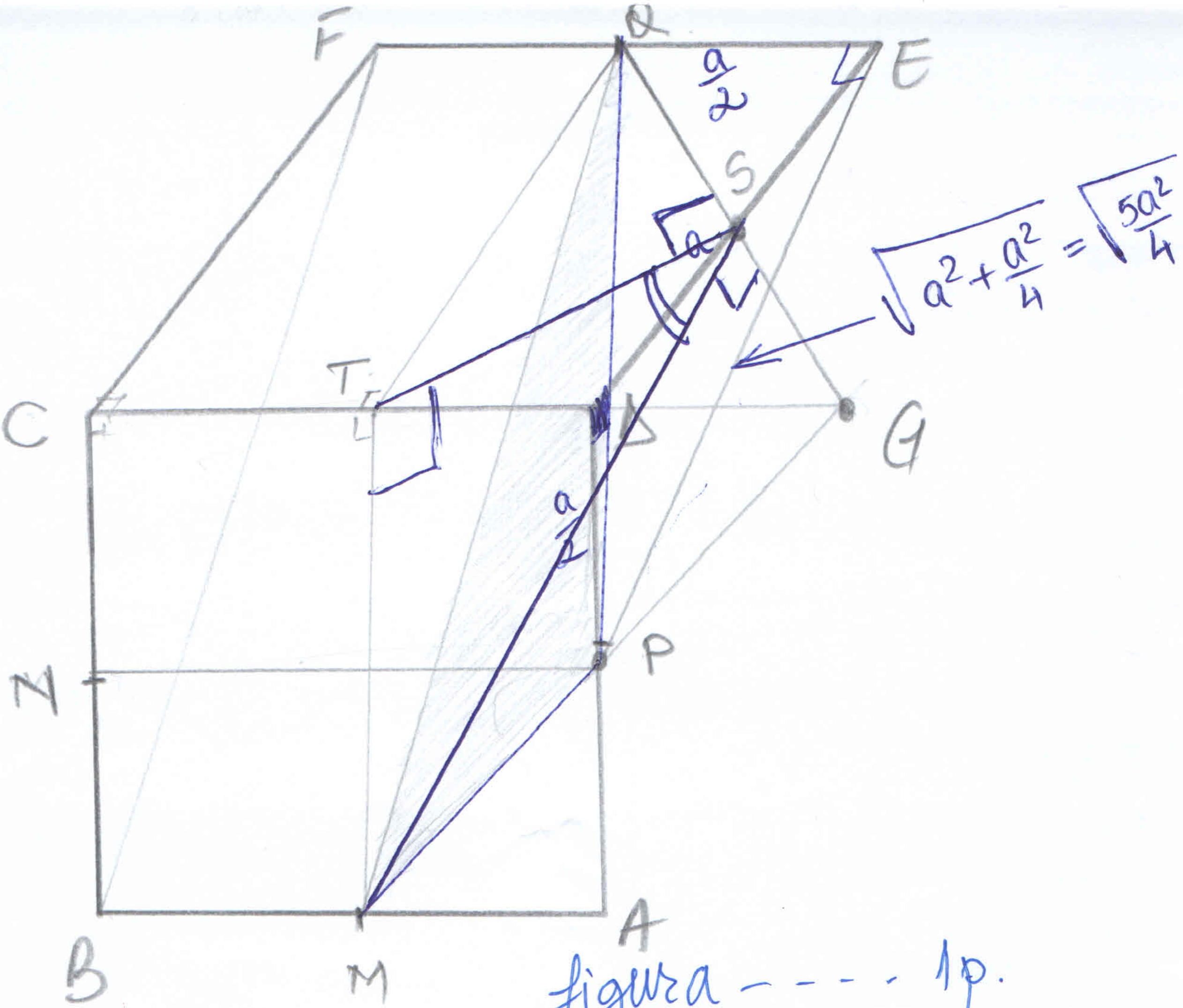

figura ---- 1p.

(3p) a) dem. că $QM \parallel FB$ ----

$$\left.\begin{array}{l} CD \perp (FCB) \\ FB \subset (FCB) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} CD \perp FB \\ MP \parallel CD \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} MP \perp FB \\ FB \parallel QM \end{array}\right| \Rightarrow MP \perp QM$$

sau $\left.\begin{array}{l} CD \perp (TQM) \\ CD \parallel NP \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} NP \perp (MTQ) \\ QM \subset (MTQ) \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{NP \perp QM}$

Pentru $\left.\begin{array}{l} (FCD) \perp (ABC) \\ (FCD) \cap (ABC) = DC \\ FC \perp CD \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} FC \perp (BCD) \\ BC \subset (BCD) \end{array}\right| \Rightarrow FC \perp BC$

$\Rightarrow \Delta FCB$ - dreptunghic is $\Rightarrow FB = a\sqrt{2} = QM$

$MP = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (linie mijlocie în ΔBAD)

$\left.\begin{array}{l} CD \perp (PDE) \\ FE \parallel CD \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} FE \perp (PDE) \\ PE \subset (PDE) \end{array}\right| \Rightarrow FE \perp PE$

Deci ΔQEP - dreptunghic

Din ΔPDE dr. $\overset{T.P.}{\Longrightarrow}$ $PE = \sqrt{\frac{5a^2}{4}}$

Din ΔQEP dr. $\Rightarrow PQ = \sqrt{\frac{5a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{6a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

Din R.T.P. în $\Delta QMP \Rightarrow \Delta QPM$ - dreptunghic

$m(\hat{P}) = 90° \Rightarrow \boxed{QP \perp MP.}$

(3p). b) $\left.\begin{array}{l} \text{Arăt. } QS = SG \\ SQ = \frac{a\sqrt{2}}{2} \end{array}\right| \Rightarrow \underline{QG = a\sqrt{2}}$ (1)

$\left.\begin{array}{l} \text{Arăt. } MP = PG \\ MP = \frac{a\sqrt{2}}{2} \end{array}\right| \Rightarrow MG = a\sqrt{2}$ (2)

Știu că $MQ = a\sqrt{2}$ (3)

Din (1) (2) și (3) $\Rightarrow \Delta MGQ$ - echilateral.

<u>Argumentare</u> $m(\widehat{(MQP), (CDF)}) = m(\widehat{TSM})$ ---

$\boxed{tg\ TSM = \sqrt{2}}$ ------

La subiectul III:

figura ---- 1p.

a) Demonstrarea $MQ \perp NP$ --- 1p

$MP \perp PQ$ --- 2p

b) ΔQGM - echilateral ---- 1p

Identificarea $\measuredangle$ plan ---- 1p.

Calcul măsura $\measuredangle$ ---- 1p