OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
21.02.2016

BAREM
CLASA a VIII a

Subiectul I

$n = (x-2y)^2 + 2(x-2)^2 - 12$ — 2 p
x $\in [-1;0]$ *și* y $\in [-1;1] \Rightarrow (x-2y)^2 \in [0;9]$ (1) — 2 p
x $\in [-1;0] \Rightarrow 2(x-2)^2 \in [8;18]$ (2) — 1 p
Din 1 și 2 rezultă că $(x-2y)^2 + 2(x-2)^2 \in [8;27]$ — 1 p
n $\in [-4;15]$ — 1 p
Total — 7p

Subiectul II

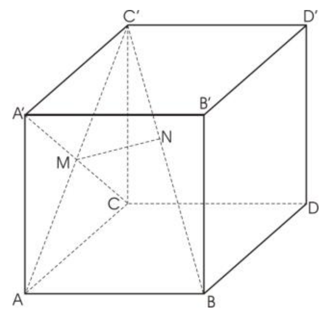
a) Evident $a+b \pm \sqrt{a^2+b^2} > 0$

Avem $\frac{1}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{1}{a+b-\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a(a+b)}{(a+b)^2-(a^2+b^2)} = \frac{2(a+b)}{2ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$...................................... 2p

b) $S = 1 - \frac{1}{\sqrt{2016}}$--...3p

c) Conform punctului a) rămân pe tablă numere pozitive cu suma inverselor neschimbata, adică această sumă este un invariant. Dacă unul din numere ar fi mai mic decât 1, atunci suma inverselor celor patru numere va fi mai mare ca 1. Cum suma inverselor numerelor scrise inițial pe tablă este mai mică decât 1 și ea este invariantă, am ajuns la contradicție. Deci răspunsul este nu.
....2p
Total: 7p

Subiectul III



BC = $6\sqrt{2}$ cm $\Longrightarrow$ AB = AC = 6 cm.

a) ACC'A' pătrat $\Longrightarrow A'C \perp AC'$ (1) . Din relațiile (1) și (2) rezultă că $A'C \perp (ABC')$.
$AB \perp (ACC') \Longrightarrow AB \perp A'C$ (2)

Construim MN $\perp BC'$. Din $A'C \perp (ABC')$, rezultă că $A'C \perp MN$.
Deci, distanța este MN. — 2p
Din asemănarea triunghiurilor $\triangle C'MN$ și $\triangle C'BA$, rezultă că :

$$\frac{C'M}{C'B} = \frac{MN}{AB} = \frac{C'N}{C'A} = \frac{3\sqrt{2}}{6\sqrt{3}} = \frac{MN}{6}$$

MN = $\sqrt{6}$ cm. 2p

b) $pr^{B}_{(ABC')} = B, B \in (ABC'); pr^{C}_{(ABC')} = M, CM \perp (ABC')$.

Rezultă că $pr^{[BC]}_{(ABC')} = [BM]$.

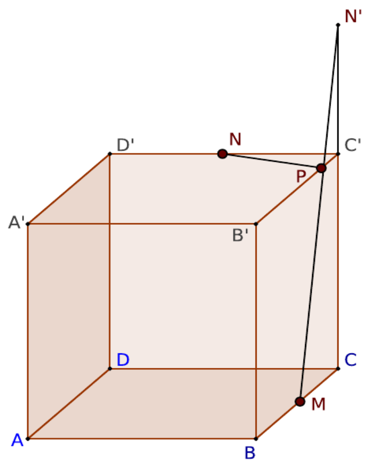
BM = $3\sqrt{6}$ cm (teorema lui Pitagora în $\triangle AMB$). 1p

c) $BM = BC \cdot \cos u^0$ 1p

$3\sqrt{6} = 6\sqrt{2} \cdot \cos u^0$. Deci, tg $u^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 1p

Total: 7p

Subiectul IV



Pe prelungirea semidreptei $(CC'$, se consideră punctul N' astfel încât

$NC' \equiv N'C'$. 3p

Din congruența triunghiurilor NPC' și $N'PC'$ rezultă

$NP \equiv N'P$... 2p

Suma $MP + NP$ este minimizată atunci când suma $MP + N'P$ este minimizată, de unde rezultă $P = N'M \cap B'C'$.

....2p

Total: 7p