OLIMPIADA DE MATEMATICĂ – FAZA LOCALĂ – 16.02.2014

BAREME DE CORECTURĂ CLASA a VII-a

SUBIECTUL I

Aflați perechile de numere întregi (x, y) pentru care există egalitatea: $x^2 + 3 = 2^y$.

$x^2+3 \geq 3$ pentru orice x intreg ………………………………………………………….*1 punct*

$y \leq 0 \Rightarrow 2^y \leq 1 \Rightarrow S = \phi$ …………………………………………………...…*1punct*

$y > 0 \Rightarrow 2^y > 1 \Rightarrow 2^y$ par…………………………………………………………….*1punct*

Deci, x impar, adică $x=2k+1 \Rightarrow (2k+1)^2+3=2^y \Rightarrow 4(k(k+1)+1)=2^y$……...…*2puncte*

$4/2^y$ și 8 nu divide 2^y……………………………………………………………….…*1punct*

$y = 2$ și $x = 1$ soluție unică ……………………………………………..….…….*1punct*

SUBIECTUL II

1. **a) Arătați că:**

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$ **pentru orice *n* număr natural nenul.**

b) Calculați suma:

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+...+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}.$$

a) $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(n+1-n)}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$ …… *3puncte*

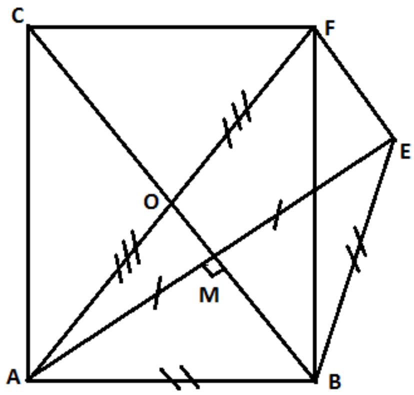
Concluzia…………………………………………………………………………..…..… *1punct*

b)Pentru $n=1,2,3.....\ 99$ înlocuind în relația de la punctual a) ……………………..… *2puncte*

s= $\frac{9}{10}$ …………………………………………………………………….…….. *1punct*

SUBIECTUL III

Considerăm triunghiul ABC, dreptunghic în A, și punctul O mijlocul ipotenuzei BC. Dacă E este simetricul lui A față de dreapta BC și punctul F este simetricul punctului A față de punctul O, arătați că patrulaterul BCFE este trapez isoscel.



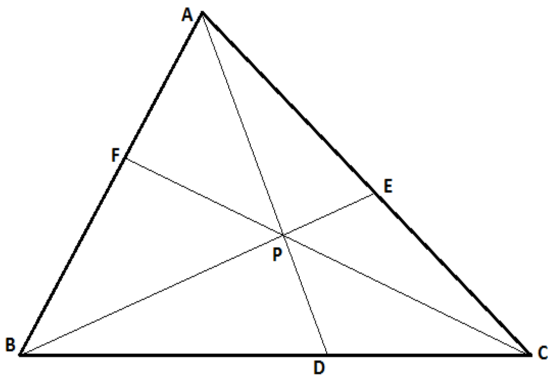
$E = Sim_{BC}A$, $AE \cap BC = \{M\}$, atunci BC este mediatoarea segmentului $[AE]$ și $[MA] \equiv [ME]$.
Reiese că $\Delta\, ABE$ este isoscel și $[AB] \equiv [BE]$…………………………………………………………………*2 puncte*

$F = Sim_O A$, atunci $[AO] \equiv [OF]$, dar $[BO] \equiv [OC]$ și $BC \cap AF = \{O\}$. Deci ABFC este paralelogram și cum $m(\angle BAC) = 90^0$ atunci este dreptunghi. Din aceasta reiese că $[AB] \equiv [CF]$, dar $[AB] \equiv [BE]$, atunci $[CF] \equiv [BE]$.
…………………………………………………………*2 puncte*

În $\Delta\, EAF$, M este mijlocul lui $[AE]$, iar O este mijlocul lui $[AF]$, adică $[MO]$ este linie mijlocie, de unde MO // EF, deci BC // EF și cum $[CF] \equiv [BE]$, atunci *BCFE* este trapez isoscel.
……………………………………………………………………………………………… *3 puncte*

SUBIECTUL IV

Se dă triunghiul ABC, în care D ϵ (BC) astfel încât $\boldsymbol{\frac{DB}{BC} = \frac{5}{8}}$, E ϵ (AC) cu $\boldsymbol{\frac{EC}{AC} = \frac{3}{7}}$, F ϵ (AB) cu $\boldsymbol{\frac{AB}{FB} = \frac{9}{5}}$. Demonstrați că dreptele AD, BE și CF sunt concurente.



$D \in (BC)$ astfel încât $\frac{DB}{BC} = \frac{5}{8}$. Prin derivare, obținem: $\frac{DB}{BC-DB} = \frac{5}{8-5}$, adică $\frac{DB}{DC} = \frac{5}{3}$
…………………………………………………… *2 puncte*

$E \in (AC)$ astfel încât $\frac{EC}{AC} = \frac{3}{7}$. Prin derivare, obținem: $\frac{EC}{AC-EC} = \frac{3}{7-3}$, adică $\frac{EC}{EA} = \frac{3}{4}$
…………………………………………………… *2 puncte*

$F \in (AB)$ astfel încât $\frac{AB}{FB} = \frac{9}{5}$. Prin derivare, obținem: $\frac{AB-FB}{FB} = \frac{9-5}{5}$, adică $\frac{FA}{FB} = \frac{4}{5}$
…………………………………………………………………………………………… *2 puncte*

Se observă că $\frac{5}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = 1$, adică $\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1$. Atunci, conform reciprocei Teoremei lui Ceva, dreptele *AD*, *BE* și *CF* sunt concurente. ……………………………………………… *1 punct*

NOTĂ: Orice soluție corectă diferită de cele din barem va fi notată corespunzător