OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
21februarie 2016

Clasa a VI-a

1.Ștefan este pasionat de istorie. El se informează despre un domnitor și formulează următoarea problemă:
Anul istoric este $\overline{1xy(x+1)}$ și verifică condiția: suma dintre $\overline{xy}$, cifra sutelor și cifra zecilor este 98. Despre ce an istoric s-a informat Ștefan?

2. a) Determinați numerele prime p cu proprietatea că $p+4$ și p^3+2 sunt simultan numere prime.
b) Demonstrați că nu există numere prime q astfel încât q^5+4 și $q^{2016}+4$ să fie simultan numere prime.

3. Fie unghiurile congruente $\measuredangle A_1OA_2, \measuredangle A_2OA_3, \measuredangle A_3OA_4, ..., \measuredangle A_{100}OA_1$ în jurul punctului O. Se colorează semidreapta $[OA_1$ și apoi se colorează fiecare a șasea semidreaptă după cea colorată (deci se colorează $[OA_1$, $[OA_7$, $[OA_{13}, ...$). În acest procedeu de stabilire a semidreptei ce urmează să fie colorată, se numără și semidreptele colorate întâlnite pe parcurs.

a) Să se determine câte semidrepte rămân necolorate.

b) Să se demonstreze că rămân semidrepte opuse necolorate după finalizarea procedeului, apoi să se determine numărul dreptelor determinate de acestea.

c) Să se precizeze dacă rămân semidrepte necolorate perpendiculare.

4. Două unghiuri suplementare au o latură comună și bisectoarele lor determină un unghi de$60°$. Determinați măsurile celor două unghiuri.

Notă:
- *Toate subiectele sunt obligatorii;*
- *Timp de lucru: 2 ore.*

Soluţii clasa a VI-a:

1. Din enunț rezultă că $\overline{xy}+x+y=98$ sau $(10\cdot x+y)+x+y=98 \Leftrightarrow$ $11\cdot x+2\cdot y=98 \Rightarrow y=\frac{98-11\cdot x}{2}$, y fiind cifră, este un număr natural:

I. deci $98-11\cdot x\geq 0 \Rightarrow x\leq \frac{98}{11}<9 \Rightarrow x\leq 8$ (1).

II. $98-11\cdot x$ este un număr divizibil cu 2, deci $11\cdot x$ trebuie să fie par.

În concluzie $x\in\{0,2,4,6,8\}$ (2). Dar $y\leq 9 \Rightarrow \frac{98-11\cdot x}{2}\leq 9 \Leftrightarrow$ $98-11\cdot x\leq 18 \Leftrightarrow x\geq \frac{80}{11}$. Deci $x\geq 8$ (3). Din (1), (2), (3) rezultă $x=8$, $y=\frac{98-11\cdot 8}{2}=\frac{98-88}{2}=\frac{10}{2}=5$. Deci $x=8, y=5$, iar anul istoric este **1859.**

2. a) Pentru $p=2$ rezultă $p+4=6$, care nu este prim.

Pentru $p=3$ rezultă $p+4=7, p^3+2=29$, deci $p=3$ este soluție.

Dacă $p\geq 5$, cum p este număr prim rezultă că este de forma M_6-1 sau M_6+1.

-dacă $p=M_6-1$ rezultă $p+4=M_6+3$, care nu este prim.

-dacă $p=M_6+1$ rezultă $p^3+2=M_6+3$, care nu este prim.

b) Pentru $q=2$ rezultă $q^5+4=36$, care nu este prim.

Pentru $q=3$ rezultă $3^5+4=247=13\cdot 19$, deci nu este prim.

Pentru $q=5$ rezultă $5^5+4=3129$, care e divizibil cu 3, deci nu este prim

Dacă $q>5, u(q)\in\{1,3,7,9\}$ deci $u\left(q^{2016}\right)=1$. Rezultă $u\left(q^{2016}+4\right)=5$ deci $q^{2016}+4$ nu este prim.

3. a) Parcurgând o dată semidreptele se colorează $[OA_n$ unde $n\in\mathbb{N}^*, n\leq 100$ iar restul împărțirii lui *n* la 6 este 1, ultima semidreaptă colorată la această parcurgere fiind $[OA_{97}$. Când parcurgem a doua oară semidreptele se colorează $[OA_n$ unde $n\in\mathbb{N}^*, n\leq 100$ iar restul împărțirii lui *n* la 6 este 3, ultima semidreaptă colorată la această parcurgere fiind $[OA_{99}$. La a treia parcurgere se colorează $[OA_n$ unde $n\in\mathbb{N}^*, n\leq 100$ iar restul împărțirii lui *n* la 6 este 5, ultima semidreaptă colorată la această parcurgere fiind $[OA_{95}$. Observăm că procesul se repetă deci rămân necolorate semidreptele $[OA_n$, cu restul împărțirii lui *n* la 6 egal cu 0, 2, 4, în total 50 de semidrepte.

b) Semidreptele rămase necolorate $[OA_2$, $[OA_4$, $[OA_6$,....$[OA_{100}$ formează în jurul punctului **O** 50 de unghiuri congruente cu măsura de $360^\circ:50=7^\circ 12'$. Semidreptele opuse $[OA_2$, $[OA_{52}$; $[OA_4$,$[OA_{54}$;....$[OA_{50}$,$[OA_{100}$ determină 25 de drepte.

c) Dacă ar fi semidrepte perpendiculare, ar trebui să existe un număr natural k astfel încât $7^\circ 12'\cdot k=90^\circ$ de unde $k=12{,}5\notin\mathbb{N}$. Deci nu rămân semidrepte necolorate perpendiculare.

4.Cele două unghiuri nu pot fi adiacente pentru că atunci bisectoarele lor ar forma un unghi drept. Deci o latură a unghiului mic e conținută în interiorul unghiului mare. Fie unghiul mare $\sphericalangle BOC$ și $(OA$ latura a doua a unghiului mic, iar $(OC$latura lor comună. Atunci $m(\sphericalangle AOC) = 2a \implies m(\sphericalangle BOC) = 180° - 2a \implies m(\sphericalangle BOA) = 180° - 4a$. Fie $(OX$ bisectoarea $\sphericalangle BOC$ și $(OY$ bisectoarea $\sphericalangle AOC$. Avem $m(\sphericalangle BOX) + m(\sphericalangle YOA) = 90°$ $\implies m(\sphericalangle XOY) = m(\sphericalangle BOC) - 90° \implies 60° = m(\sphericalangle BOC) - 90° \iff m(\sphericalangle BOC) = 150° \implies$ $\implies m(\sphericalangle AOC) = 30°$. În concluzie unghiurile au măsurile de $\mathbf{150}°$ și respectiv $\mathbf{30}°$.