Olimpiada Naţională de Fizică
Vaslui 2015
Proba teoretică
SUBIECTE

XII

SUBIECTUL 1

A. ***Particulă neutră ...***

O particulă neutră se deplasează cu viteza $v<c$, unde c este viteza luminii în vid. Particula „dispare” și se formează doi fotoni. *Să se determine* valoarea minimă a unghiului dintre direcțiile de mișcare ale fotonilor în următoarele variante: $v<c$ (particula neutră se deplasează relativist) și $v \cong c$(particula neutră se deplasează ultrarelativist).

B. ***Electron liber în repaus...***

Un foton ciocnește frontal un electron liber, aflat în repaus. Fotonul difuzat se întoarce pe aceeași direcție cu cea a fotonului incident. Energia fotonului este de f ori mai mare decât energia de repaus a electronului. *Să se determine* raza de curbură a traiectoriei electronului de recul într-un câmp magnetic de inducție $\vec{B}$, dacă electronul pătrunde în câmp perpendicular pe direcția lui $\vec{B}$. Se cunosc: masa de repaus a electronului, m_0, viteza luminii în vid, c și sarcina electrică elementară, e.

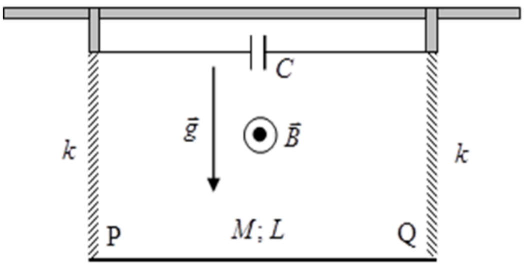
C. ***Electron liber în mișcare ...***

Un foton cu lungimea de undă λ_0 ciocnește un electron al cărui impuls $\vec{p}_e$ este perpendicular pe direcția de mișcare a fotonului incident. *Să se determine* variația relativă a lungimii de undă a fotonului difuzat sub unghiul θ față de direcția inițială. Se cunosc: masa de repaus a electronului, m_0, viteza luminii în vid, c și constanta lui Planck, h.

SUBIECTUL 2

A. ***Oscilații în câmp magnetic***

Conductorul liniar PQ, cu masa *M* și lungimea *L*, reprezentat în desenul din figura alăturată, este în echilibru, fiind suspendat în poziție orizontală cu ajutorul a două resorturi verticale identice, conductoare, foarte ușoare, fiecare având constanta de elasticitate *k*. Capetele superioare ale resorturilor sunt conectate la un condensator cu capacitatea *C*. Tot sistemul se află într-un câmp magnetic uniform, cu vectorul inducție magnetică $\vec{B}$ perpendicular pe planul sistemului.



a. Din poziția de echilibru, conductorul este deplasat în plan vertical, paralel cu poziția sa de echilibru și apoi este eliberat. *Să se determine* perioada oscilațiilor conductorului**.**

b. *Să se scrie* legea de mișcare a conductorului, după eliberarea acestuia, considerând că la momentul inițial conductorul oscilant trece prin poziția extremă inferioară.

B. ***Culoarea peliculei de lichid***

Pe un cadru dreptunghiular confecționat din sârmă, cu dimensiunile $a=0{,}02\ \text{m}$ și respectiv $b=0{,}03\ \text{m}$, după scoaterea dintr-un vas cu apă și săpun, s-a format o peliculă de lichid. La observarea în lumină reflectată, unghiul de incidență fiind $\alpha=30^\circ$, pelicula de lichid apare de culoare verde, $\lambda=5\cdot10^{-7}$ m.

a. *Să se argumenteze* în ce situație se poate determina masa peliculei de lichid formată pe cadrul dreptunghiular, folosind numai etaloane cu masa $\Delta m = 0{,}1\,\text{mg}$. Pentru soluția lichidă a peliculei se cunosc: densitatea, $\rho = 10^3\ \text{kg}/\text{m}^3$ și indicele de refracție, $n = 1{,}33$.

b. *Să se determine* culoarea observată a celei mai subțiri pelicule, îndeplinind condițiile problemei, dacă lumina incidentă pe peliculă și lumina reflectată de peliculă sunt perpendiculare pe peliculă.

SUBIECTUL 3. ***INTERSTELLAR***

În filmul „Interstellar", astronautul Cooper coboară prima dată pe o planetă numită în film „planeta lui Miller", situată foarte aproape de o gaură neagră numită Gargantua. Pe această planetă, cu suprafaţa acoperită cu apă, din cauza atracţiei gravitaţionale foarte mari exercitată de gaura neagră, se produc periodic fenomene mareice extrem de intense, cu valuri de peste 1 km înălţime. Vom presupune că potenţialul gravitaţional al găurii negre este descris de potenţialul Paczynski – Wiita. Acest potenţial este o formă puţin modificată a potenţialului newtonian, a fost propus în anul 1980 şi în anumite cazuri dă rezultate identice cu cele ce se obţin prin aplicarea riguroasă a relativităţii generale einsteiniene. Expresia acestui potenţial este: $\Phi(r) = -\dfrac{k \cdot M}{r - r_G}$, unde k este constanta atracţiei universale, M este masa găurii negre, $r_G = \dfrac{2k \cdot M}{c^2}$ este raza orizontului găurii negre, iar $c = 3 \cdot 10^8\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$ este viteza luminii în vid. Pentru $r < r_G$, nimic nu mai „scapă" din gaura neagră. Presupunem că gaura neagră nu se roteşte în jurul axei sale, iar orbita planetei este circulară, cu centrul în centrul găurii negre.

a. Determinaţi energia totală pe unitatea de masă a planetei.

b. Determinaţi viteza planetei pe orbită.

c. Determinaţi viteza unghiulară a planetei în jurul găurii negre.

d. Pentru studiul mișcării de rotație a unui corp în jurul unei axe, în locul impulsului, $\vec{p}$, se utilizează momentul acestuia față de axa de rotație, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ ($\vec{r}$ este raza vectoare), numit și moment cinetic. Determinați momentul cinetic al unităţii de masă a planetei.

e. Folosind condiţiile de stabilitate ale orbitei planetei, arătaţi că planeta poate avea două orbite pe care ea se află în echilibru dinamic, de raze $r = 2r_G$ şi $r = 3r_G$, dar numai una din acestea este stabilă. Precizaţi și demonstrați care din ele este stabilă.

f. În film, o oră petrecută pe planeta lui Miller corespunde cu 7 ani care trec pe Pământ. Pentru aceasta, conform teoriei relativităţii generale, este necesar ca gaura neagră să aibă o masă de aproximativ 10^8 ori mai mare decât masa Soarelui. Considerând masa Soarelui $m_S \approx 2 \cdot 10^{30}$ kg şi $k = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2, calculaţi viteza planetei pe orbita stabilă şi perioada de revoluţie a planetei în jurul găurii negre.

Subiecte propuse de:
Prof. dr. Gabriel FLORIAN, Colegiul Național „Carol I" – Craiova
Prof. dr. Mihail SANDU, Liceul Tehnologic de Turism – Călimănești
Prof. Liviu ARICI, Colegiul Național „Nicolae Bălcescu" – Brăila

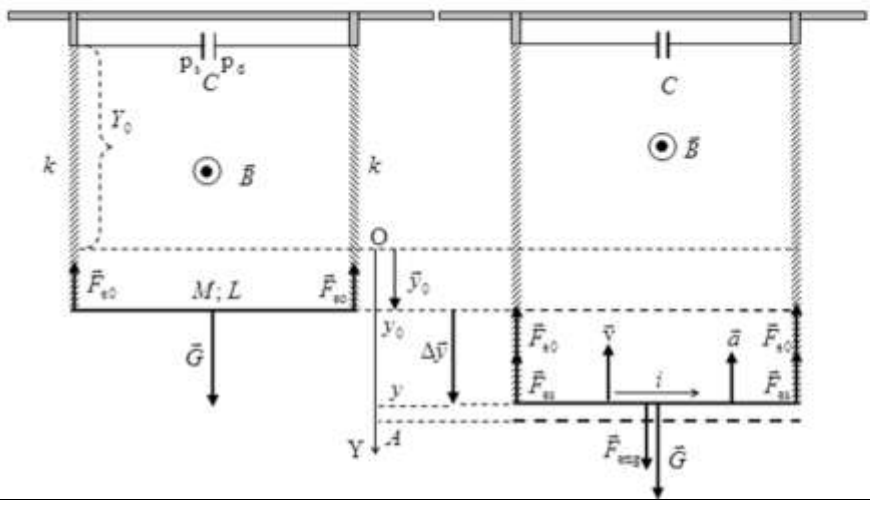
Olimpiada Naţională de Fizică
Vaslui 2015
Proba teoretică
BAREM

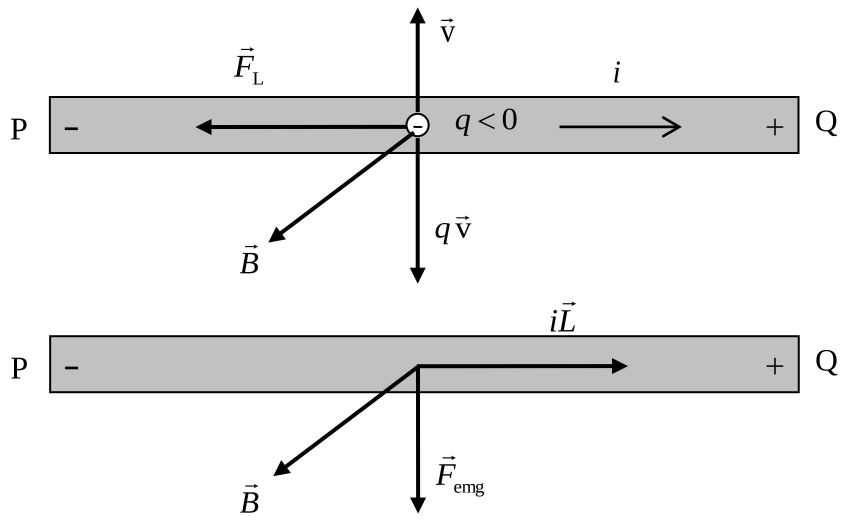
XII

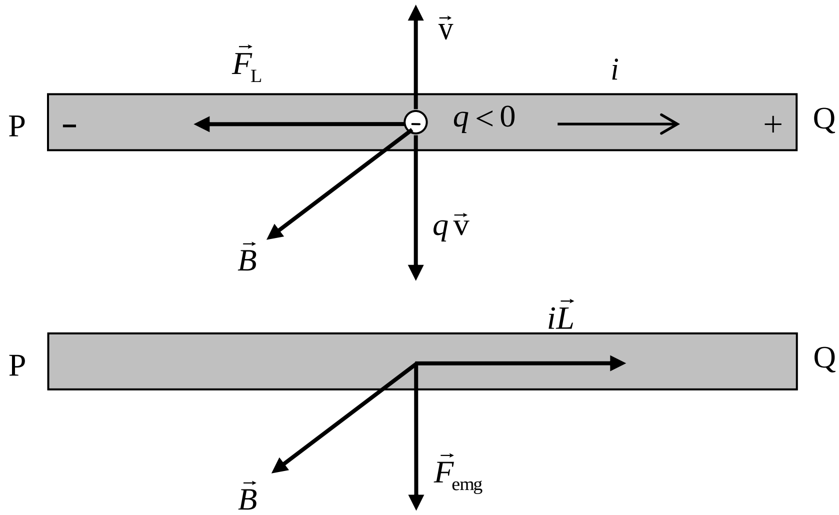
Subiect 1.	Parţial	Punctaj
1. Barem subiect 1		**10**
A.		**3**
Din conservarea impulsului: $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$; $p^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 \cdot p_2 \cdot \cos\alpha$	0,50	
Obținem: $\cos\alpha = \dfrac{p^2 - p_1^2 - p_2^2}{2p_1 \cdot p_2}$	0,25	
Din conservarea energiei: $m \cdot c^2 = p_1 \cdot c + p_2 \cdot c$ Cu: $p = m \cdot \mathrm{v} = \dfrac{m_0 \cdot \mathrm{v}}{\sqrt{1 - \dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}$	0,50	
Obținem: $p = \dfrac{\mathrm{v}}{c} \cdot (p_1 + p_2)$	0,25	
Deci: $p^2 = \dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}\left(p_1^2 + 2p_1 \cdot p_2 + p_2^2\right)$	0,25	
După efectuarea calculelor: $\cos\alpha = 2\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2} - 1 - \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right) \cdot \left(\sqrt{\dfrac{p_1}{p_2}} - \sqrt{\dfrac{p_2}{p_1}}\right)^2$	0,50	
Rezultă: $\alpha_{\min} = \arccos\left(2\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2} - 1\right)$	0,25	
Pentru $\mathrm{v} \cong c$: $\alpha_{\min} = 0$	0,50	
B.		**3**
Conservarea energiei: $h \cdot \nu_0 = h \cdot \nu + m \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2$ Unde: $h \cdot \nu_0 = f \cdot m_0 c^2$ $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}}} = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$	0,50	
Conservarea impulsului: $\dfrac{h \cdot \nu_0}{c} = -\dfrac{h \cdot \nu}{c} + p$	0,50	

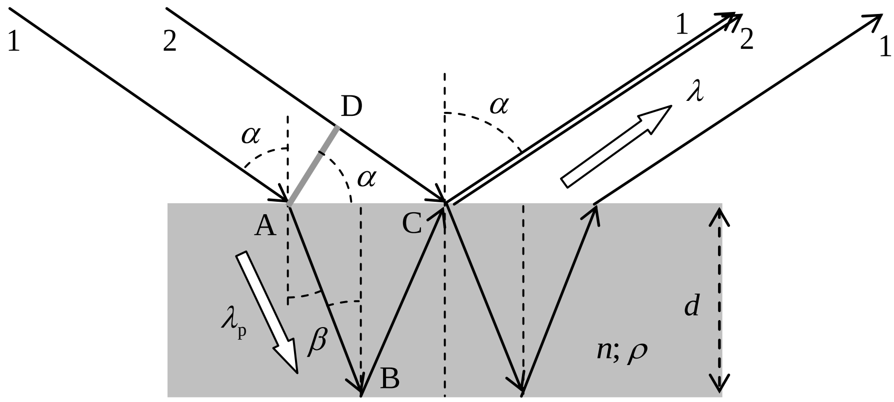
Unde: $p = m \cdot \text{v} = \dfrac{m_0 \cdot \beta \cdot c}{\sqrt{1-\beta^2}}$		
Așadar cu: $h \cdot \nu = \dfrac{m_0 \cdot \beta \cdot c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - f \cdot m_0 \cdot c^2$	0,25	
Obținem: $$f \cdot m_0 \cdot c^2 = \frac{m_0 \cdot \beta \cdot c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - f \cdot m_0 \cdot c^2 + m_0 \cdot c^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$$	0,25	
Deci: $2f = \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1$	0,25	
Adică: $2f + 1 = \sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}}$	0,25	
După efectuarea calculelor avem succesiv: $$\beta = \frac{4f^2 + 4f}{4f^2 + 4f + 2}$$ $$p = m_0 \cdot c \cdot \frac{2f \cdot (f+1)}{2f+1}$$	0,50	
Dar: $e \cdot \text{v} \cdot B = \dfrac{m \cdot \text{v}^2}{R}$	0,25	
Rezultă: $$R = \frac{m_0 \cdot c}{e \cdot B} \cdot \frac{2f \cdot (f+1)}{2f+1}$$	0,25	
C.		**3**
Conservarea energiei: $$h \cdot \nu_0 + E_c = h \cdot \nu + E'_c$$ Unde: $E_c^2 = p_e^2 \cdot c^2 + m_0^2 \cdot c^4$ $$E_c'^2 = p_e'^2 \cdot c^2 + m_0^2 \cdot c^4$$	0,75	
Conservarea impulsului: $$p_e = p'_e \cdot \sin\varphi + \frac{h}{\lambda} \cdot \sin\theta \Rightarrow p_e'^2 \cdot \sin^2\varphi = \left(p_e - \frac{h}{\lambda} \cdot \sin\theta\right)^2$$ $$\frac{h}{\lambda_0} = p'_e \cdot \cos\varphi + \frac{h}{\lambda} \cdot \cos\theta \Rightarrow p_e'^2 \cdot \cos^2\varphi = \left(\frac{h}{\lambda_0} - \frac{h}{\lambda} \cdot \cos\theta\right)^2$$	0,75	
Din ultimele două relații obținem: $$p_e'^2 = \left(p_e - \frac{h}{\lambda} \cdot \sin\theta\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda_0} - \frac{h}{\lambda} \cdot \cos\theta\right)^2$$	0,75	
În urma efectuării calculelor: $$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{2\dfrac{h}{\lambda_0} \cdot \sin^2\dfrac{\theta}{2} - p_e \cdot \sin\theta}{\sqrt{p_e^2 + m_0^2 \cdot c^2}}$$	0,75	
Oficiu		**1 p**

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

Subiect 2.	Parţial	Punctaj
2. Barem subiect 2		**10**
A.		**5**
a.		**4**
În desenul din figura alăturată, unde am considerat axa OY orientată pe verticală în jos, coordonata inițială, y_0, indică poziția de echilibru a conductorului suspendat de resorturi, astfel încât: $$Mg - ky_0 - ky_0 = 0;\ \ Mg - 2ky_0 = 0.$$  	0,50	
Conductorul este deplasat apoi, pe verticală în jos, până în poziția a cărei coordonată este *A*. După eliberarea din această poziție, conductorul începe să se deplaseze accelerat, pe verticală în sus, spre poziția de echilibru, viteza sa, $\vec{v}$, fiind din ce în ce mai mare. Pe tot acest sector, al ascensiunii spre poziția de echilibru, vectorul accelerație, $\vec{a}$, este orientat pe verticală în sus. Pentru că mișcarea accelerată a conductorului se face în câmp magnetic, conductorul va fi sediul unei tensiuni electromotoare de inducție: $$e = BL\mathrm{v},$$ din ce în ce mai mare (pentru că v este din ce în ce mai mare), ea fiind rezultatul acțiunii forțelor Lorentz asupra electronilor liberi din structora conductorului, așa cum indică desenul din figura alăturată, unde: $$\vec{F}_{\mathrm{L}} = q_{\mathrm{e}}\,\vec{\mathrm{v}} \times \vec{B},$$ în care $q_{\mathrm{e}} < 0,$ iar $\vec{\mathrm{v}}$ este viteza instantanee (variabilă) a conductorului, atunci când coordonata sa de poziție este *y*: $$\mathrm{v} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dot{y},$$ astfel încât, de-a lungul conductorului, electronii liberi se vor deplasa de la Q spre P, ceea ce va determina electrizarea armăturilor condensatorului, sarcinile electrice ale celor două armături fiind din ce în ce mai mari: $$q_{\mathrm{stanga}} < 0;\ q_{\mathrm{dreapta}} > 0;$$ $$q_{\mathrm{condensator}} = q == eC = BLC\mathrm{v} = BLC\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = BLC\dot{y}.$$ Sarcina electrică a condensatorului va fi maximă în momentul trecerii conductorului prin poziția de echilibru, atunci când viteza sa este maximă:	0,50	

$$q_{\max} = CE_{\max} = BLC\,\mathrm{v}_{\max}.$$ Sarcina electrică a condensatorului este nulă atunci când conductorul trece prin pozițiile extreme, inferioară sau superioară, atunci când viteza conductorului este nulă.		
	0,50	
Pe toată durata deplasării ascendente a conductorului, prin conductor trece un curent electric cu intensitatea instantanee: $$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = BLC\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) = BLC\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{d}t} = BLC\dot{\mathrm{v}} = BLC\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = BLC\ddot{y} = BLCa,$$ al cărui sens este de la P spre Q, a cărei valoare este maximă în pozițiile extreme ale conductorului și nulă atunci când conductorul trece prin poziția de echilibru. În aceste condiții, pe toată durata ascensiunii accelerate a conductorului, aflat în câmp magnetic, asupra conductorului acționează o forța electromagnetică: $$\vec{F}_{\mathrm{emg}} = i\vec{L} \times \vec{B},$$ orientată pe verticală în jos, permanent orientată invers față de vectorul accelerație, $\vec{a}$; $$a = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{y};$$ $$F_{\mathrm{emg}} = B^2L^2C\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = B^2L^2C\ddot{y} = B^2L^2Ca.$$	0,50	
Atunci când conductorul își continuă mișcarea ascendentă, trecând deasupra poziției de echilibru, sensul vectorului viteză, $\vec{\mathrm{v}}$, nu se schimbă, dar modulul său este din ce în ce mai mic. Ca urmare, sensul forțelor Lorentz se păstrează, astfel încât și polaritățile electrice ale capetelor conductorului se mențin, dar valoarea tensiunii electromotoare de inducție este din ce în ce mai mică. Corespunzător, sensul curentului de inducție prin conductorul PQ se menține de la P spre Q, dar valoarea sa este din ce în ce mai mică. Atunci când conductorul a ajuns în poziția extremă superioară, sarcina electrică a condensatorului este nulă, iar intensitatea curentului prin conductor este nulă.	0,50	
În aceste condiții, mișcarea ascendentă accelerată a conductorului se face sub acțiunea rezultantei forțelor care acționează asupra sa, astfel încât, în acord cu principiul fundanmental al dinamicii, rezultă: $$M\vec{a} = \vec{G} + 2\vec{F}_{\mathrm{e}0} + 2\vec{F}_{\mathrm{es}} + \vec{F}_{\mathrm{emg}};$$	0,50	

$$Ma = -Mg + 2ky_0 + 2k(y - y_0) - B^2L^2Ca;$$ $$(M + B^2L^2C)a + 2k\cdot\Delta y = 0;$$ $$a + \frac{2k}{M + B^2L^2C}\Delta y = 0,$$ reprezentând ecuația mișcării oscilatorului armonic, ceea ce înseamnează că mișcarea conductorului, suspendat de cele două resorturi, în câmpul magnetic dat, este o mișcare oascilatorie armonică; $$\omega^2 = \frac{2k}{M + B^2L^2C} = \frac{4\pi^2}{T^2};$$ $$T = 2\pi\sqrt{\frac{M + B^2L^2C}{2k}},$$ reprezentând perioada oscilațiilor armonice efectuate de conductorul mobil.		
	0,50	
Când conductorul continuă să urce, dar deasupra poziției de echilibru, sensul forțelor Lorentz se păstrează, astfel încât și polaritatea tensiunii electromotoare din conductor se menține, dar valoarea acestei tensiuni este din ce în ce mai mică, deoarece viteza conductorului în ascensiune, deasupra poziției de echilibru scade. În aceste condiții condensatorul se descarcă, iar curentul prin conductor își schimbă sensul, astfel încât sensul forței electromagnetice care acționează asupra conductorului se schimbă, fiind acum pe verticală în sus, în timp ce accelerația conductorului este orientată pe verticală în jos, această mișcare fiind încetinită. Și pe acest sector orientările vectorilor $\vec{F}_{emg}$ și $\vec{a}$ sunt opuse.	0,50	
b.		**1**
$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{M + B^2L^2C}};$$ $$y = A\cdot\cos(\omega t + \varphi);$$ $$t_0 = 0;\ \ y_0 = -A;$$ $$\cos\varphi = -1;\ \ \varphi = \pi;$$ $$y = A\cdot\cos(\omega t + \pi) = -A\cdot\sin\omega t.$$	1,00	

B.		**4**
a.		**3**
Dacă în lumina reflectată, pelicula apare de culoare verde, înseamnă că razele 1 și 2, reprezentate în desenul din figura alăturată, corespunzătoare lungimii de undă $\lambda = 5\cdot10^{-7}$ m, interferă, producând un maxim de interferență. Ca urmare, diferența de drum optic dintre aceste două raze este egală cu un număr întreg de lungimi de undă. 	0,50	
Lungimea de undă a radiației în interiorul peliculei este $\lambda_p = \lambda / n$. Numărul lungimilor de undă, λ_p, cuprinse în drumul ABC al razei 1, este: $$k_1 = \frac{AB+BC}{\lambda_p};\ AB = BC = \frac{d}{\cos\beta},$$ unde d – grosimea peliculei; $$k_1 = \frac{2nd}{\lambda\cos\beta}.$$ Numărul lungimilor de undă, λ, care se cuprind în drumul optic DC al razei 2, este: $$k_2 = \frac{DC}{\lambda};\ AC = 2\,AB\sin\beta = \frac{2d\sin\beta}{\cos\beta};\ DC = AC\sin\alpha = \frac{2d\sin\alpha\sin\beta}{\cos\beta};$$ $$k_2 = \frac{2d\sin\alpha\sin\beta}{\lambda\cos\beta};\ \sin\alpha = n\sin\beta;$$ $$k_2 = \frac{2nd\sin^2\beta}{\lambda\cos\beta}.$$	0,50	
Deoarece reflexia razei 2 în punctul C se face cu un salt de semiundă, rezultă că diferența drumurilor optice ale razelor 1 și 2 după reflexia pe peliculă, este: $$\Delta = k_1\lambda - \left(k_2 + \frac{1}{2}\right)\lambda = \left(k_1 - \left(k_2 + \frac{1}{2}\right)\right)\lambda;$$ $$\Delta = 2nd\cos\beta - \frac{\lambda}{2}.$$	0,50	
Pentru obținerea unui maxim de interferență trebuie îndeplinită condiția: $$\Delta = 2nd\cos\beta - \frac{\lambda}{2} = 2k\frac{\lambda}{2};\ k = 0, 1, 2, ...,$$ astfel încât, pentru diferite valori ale lui k (când n și λ sunt neschimbați), corespund	0,50	

diferite valori ale grosimii peliculei de lichid: $$d_k = \frac{2k+1}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}\frac{\lambda}{4};\ k = 0, 1, 2, ...$$		
În aceste condiții, cea mai subțire peliculă de lichid, obținută pentru $k = 0$, va avea grosimea: $$d_0 = d_{\min} = \frac{1}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}\frac{\lambda}{4} = 10^{-7}\ \text{m},$$ având masa: $$m_{\min} = abd_{\min}\rho = 0{,}06\ \text{mg}.$$ Pentru pelicule mai groase: $$d_k = (2k+1)d_{\min};$$ $$m_k = (2k+1)m_{\min} = (2k+1)\cdot 0{,}06\ \text{mg}.$$ Cântărirea exactă este posibilă atunci când: $$m_k = p\cdot\Delta m = p\cdot 0{,}1\ \text{mg}.$$ Rezultă: $$2k+1 = p\cdot\frac{5}{3}.$$	0,50	
Această ecuație admite soluții cu k și p întregi atunci când: $$k = 5s+2$$ și $$p = 6s+3,$$ unde $s = 0, 1, 2, 3, ...$	0,50	
b.		**1**
La incidența normală, pe pelicula cu grosimea minimă, condiția obținerii unui maxim de interferență este îndeplinită dacă: $$d_{\min} = \frac{1}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}\frac{\lambda_x}{4} = 10^{-7}\ \text{m};$$ $$n = 1{,}33;\ \alpha = 0;$$ $$\frac{1}{n}\frac{\lambda_x}{4} = 10^{-7}\ \text{m};\ \lambda_x \approx 5{,}32\cdot 10^{-7}\ \text{m}.$$	1,00	
Oficiu		**1 p**

Subiect 3.	**Parţial**	**Punctaj**
3. Barem subiect 3		**10**
a.		**1**
Energia totală este: $$E = E_{cin} + E_{pot} = \frac{mv^2}{2} + m\Phi(r)$$	0,50	
Rezultă: $$e = \frac{E}{m} = \frac{v^2}{2} + \Phi(r)$$	0,50	
b.		**1**
Forţa care acţionează este o forţă de tip centripet şi ea derivă dintr-un potenţial: $$F = \frac{mv^2}{r} = \frac{dE_{pot}}{dr} = m\frac{d\Phi(r)}{dr}$$	0,50	
Rezultă: $$v^2 = r\frac{d\Phi(r)}{dr}$$	0,25	
adică $$v = \sqrt{r\frac{d\Phi(r)}{dr}}$$	0,25	
c.		**1**
Pentru: $$v = \omega r \Rightarrow \omega = \frac{v}{r}$$	0,50	
Rezultă: $$\omega = \sqrt{\frac{1}{r}\frac{d\Phi(r)}{dr}}$$	0,50	
d.		**1**
Pentru: $$L = mvr \Rightarrow l = \frac{L}{m} = vr$$	0,50	
Rezultă: $$l = \sqrt{r^3\frac{d\Phi(r)}{dr}}$$	0,50	
e.		**4**
Energia de legătură a unității de masă a planetei poate fi scrisă: $$e = \frac{v^2}{2} + \Phi(r) = \frac{v^2}{2} - \frac{kM}{r - r_G} = \frac{1}{2}r\frac{kM}{(r-r_G)^2} - \frac{kM}{r-r_G} = \frac{kM}{2}\frac{2r_G - r}{(r-r_G)^2}$$	0,75	
Pentru ca sistemul *gaură neagră+planetă* să fie legat trebuie ca: $$e \le 0$$	0,50	

Adică: $r \geq 2r_G$.		
De aici: $r_{\min} = 2r_G$. Aceasta este raza minimă a orbitei planetei pe care aceasta poate fi în echilibru, dar instabil. Pentru o rază mai mică, planeta este atrasă ireversibil spre gaura neagră.	0,75	
Pentru ca orbita să fie stabilă trebuie ca energia de legătură, e, să fie negativă și minimă.	0,50	
Efectuând calculele, se obţine pe rând: $\frac{de}{dr} = \frac{d}{dr}\left[\frac{v^2}{2} + \Phi(r)\right] = \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{2} r \frac{d\Phi(r)}{dr} + \Phi(r)\right] = \frac{1}{2}\frac{d\Phi(r)}{dr} + \frac{1}{2} r \frac{d^2\Phi(r)}{dr^2} + \frac{d\Phi(r)}{dr} =$ $\frac{3}{2}\frac{d\Phi(r)}{dr} + \frac{1}{2} r \frac{d^2\Phi(r)}{dr^2}$ Se obţine: $\frac{de}{dr} = \frac{kM}{(r - r_G)^2}\left(\frac{3}{2} - \frac{r}{r - r_G}\right) = 0$ De aici rezultă $r = 3r_G$.	0,75	
Deoarece pentru $r = 3r_G$ avem $\frac{\mathrm{d}^2 e}{\mathrm{d}r^2} > 0$, energia de legătură, e, va avea valoare minimă.	0,75	
f.		**1**
Pentru: $v(3r_G) = \sqrt{3r_G \frac{kM}{(2r_G)^2}} = \sqrt{\frac{3kM}{4r_G}} = 1{,}837 \cdot 10^8\, m/s$ unde: $r_G = \frac{2kM}{c^2} = 2{,}964 \cdot 10^{11}\, m$	0,50	
Rezultă: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \frac{3r_G}{v} = 3{,}042 \cdot 10^4\, s \approx 8{,}45\, ore$	0,50	
Oficiu		**1 p**

Barem propus de:
Prof. dr. Gabriel FLORIAN, Colegiul Național „Carol I" – Craiova
Prof. dr. Mihail SANDU, Liceul Tehnologic de Turism – Călimănești
Prof. Liviu ARICI, Colegiul Național „Nicolae Bălcescu" – Brăila