

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
ETAPA LOCALĂ  
30 IANUARIE 2015

## CLASA a VIII-a

**Subiectul 1.** Arătați că  $\sqrt{\frac{2}{1}} \cdot \sqrt{\frac{2+4}{1+3}} \cdot \sqrt{\frac{2+4+6}{1+3+5}} \cdot \dots \cdot \sqrt{\frac{2+4+6+\dots+2016}{1+3+5+\dots+2015}}$  este număr irațional .

**Subiectul 2.** Dacă  $a$  și  $b$  sunt numere reale astfel încât  $a^2 + b^2 - 2\sqrt{2}a - 2\sqrt{3}b = -5$ , arătați că  $\left(\frac{2}{a} + \frac{3}{b}\right)(b - a) = 1$ .

**Subiectul 3.** Pe planul triunghiului isoscel  $ABC$  se ridică perpendiculara  $AM$ . Dacă  $AM=AC=b$ ,  $AB=c$  iar  $(b^2 + c^2 - 6)^2 + (b^2 - c^2 + 4)^2 = 0$  calculați distanța de la  $M$  la  $BC$ .

**Subiectul 4.** În cubul  $ABCD A'B'C'D'$  considerăm  $Q$  proiecția lui  $D'$  pe  $A'C$  și  $S$  proiecția lui  $D'$  pe  $AC'$ . Arătați că:

- $A'C \perp (D'QB')$
- $QS \parallel (ABC)$ .

**Notă: Toate subiectele sunt obligatorii**  
**Timp de lucru: 3 ore**

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**  
**ETAPA LOCALĂ**  
**30 IANUARIE 2015**  
**CLASA a VIII-a**  
**Bareme**

**Subiectul 1.**

	$\frac{2+4+6+\dots+2k}{1+3+5+\dots+(2k-1)} = \frac{2 \cdot \frac{k(k+1)}{2}}{k^2} = \frac{k+1}{k}$	<b>3p</b>
	$\sqrt{\frac{2}{1}} \cdot \sqrt{\frac{2+4}{1+3}} \cdot \sqrt{\frac{2+4+6}{1+3+5}} \cdot \dots \cdot \sqrt{\frac{2+4+6+\dots+2016}{1+3+5+\dots+2015}} =$ $\sqrt{\frac{2}{1} \cdot \frac{2+4}{1+3} \cdot \frac{2+4+6}{1+3+5} \cdot \dots \cdot \frac{2+4+6+\dots+2016}{1+3+5+\dots+2015}} = \sqrt{\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{1014}{1013}} =$ $= \sqrt{1014} \text{ număr ireductibil (demonstrarea faptului că 1014 nu este p.p.)}$	<b>4p</b>

**Subiectul 2.**

	$a^2 + b^2 - 2\sqrt{2}a - 2\sqrt{3}b = -5 \Leftrightarrow (a - \sqrt{2})^2 + (b - \sqrt{3})^2 = 0 \Rightarrow$ $a = \sqrt{2} \text{ și } b = \sqrt{3}$	<b>4p</b>
	$\left(\frac{2}{a} + \frac{3}{b}\right)(b-a) = \left(\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{3}}\right)(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = (\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 1$	<b>3p</b>

**Subiectul 3.**

	$(b^2 + c^2 - 6)^2 + (b^2 - c^2 + 4)^2 = 0 \Rightarrow c = \sqrt{5} \text{ și } b = 1$ $AC=1, AB=\sqrt{5} \Rightarrow BC=\sqrt{5} \text{ (} 1+1 < \sqrt{5} \text{)}$	<b>2p</b>
	Construcția perpendiculararei MN pe BC (T3⊥)	<b>2p</b>
	Calculul înălțimii $AN = \frac{\sqrt{95}}{10}$ Calculul distanței $MN = \frac{\sqrt{195}}{10}$	<b>3p</b>

**Subiectul 4.**

<b>a.</b>	$D'B' \perp (ACC') \Rightarrow D'B' \perp A'C$ $A'C \perp D'Q, A'C \perp D'B', D'Q \cap D'B' = \{D'\} \Rightarrow A'C \perp (D'QB')$	<b>3p</b>
<b>b.</b>	$\Delta D'A'C \cong \Delta D'C'A \Rightarrow \sphericalangle D'A'C \cong \sphericalangle D'C'A$ $\Delta D'A'Q \cong \Delta D'C'S \Rightarrow A'Q \cong C'S$ $A'Q = C'S, A'O = C'O \Rightarrow QS \parallel A'C', \{O\} = A'C' \cap AC'$ $A'C' \parallel AC, AC \subset (ABC) \text{ și concluzia.}$	<b>4p</b>