OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ-21 FEBRUARIE 2016

Clasa a VII-a

SUBIECTUL I: Să se arate că:

$$0,9 < \frac{3}{2^2} + \frac{5}{6^2} + \frac{7}{12^2} + \cdots + \frac{2013}{1013042^2} < 1$$

SUBIECTUL II: Fie a, b, c numere raționale nenule, astfel încât oricare două sunt diferite între ele. Știind că $c = a + b$ calculați: $\left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right) \cdot \left(\frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a}\right)$.

SUBIECTUL III: Se consideră un triunghi ABC și punctele M, N, P pe laturile $[BC], [AC]$, respectiv $[AB]$ astfel încât: $\frac{BM}{BC} = \frac{CN}{CA} = \frac{AP}{AB} = \frac{1}{3}$. Dacă E este mijlocul lui $[NP]$ și F mijlocul lui $[BC]$, demonstrați că EF este paralelă cu AM și $EF = \frac{1}{2}AM$.

SUBIECTUL IV: În pătratul $ABCD$ punctele E, F, G, H aparțin laturilor $[AB], [BC], [CD]$ respectiv $[DA]$ astfel încât $EG \perp FH$. Arătați că: $EG = FH$.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect este notat de la 0 la 7.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ-21 FEBRUARIE 2016
Clasa a VII-a
BAREM DE EVALUARE ŞI NOTARE

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem .**

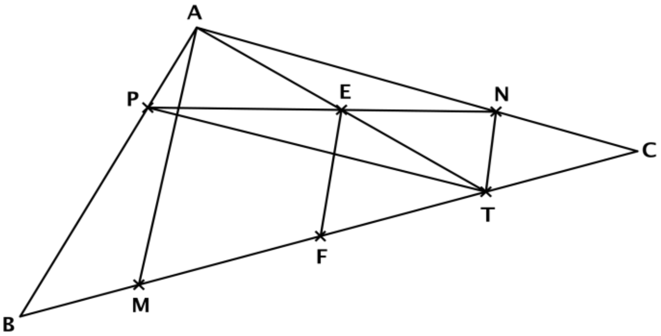
SUBIECTUL I

$S=\frac{3}{2^2}+\frac{5}{6^2}+\frac{7}{12^2}+\cdots+\frac{2013}{1013042^2}$	
$S=\frac{2^2-1^2}{1^2\cdot 2^2}+\frac{3^2-2^2}{2^2\cdot 3^2}+\frac{4^2-3^2}{3^2\cdot 4^2}+\cdots+\frac{1007^2-1006^2}{1006^2\cdot 1007^2}$	**2p**
$S=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{1006^2}-\frac{1}{1007^2}\right)$	**2p**
$S=1-\frac{1}{1007^2}<1$	**1p**
$0,9=1-\frac{1}{10}<1-\frac{1}{1007^2}=S$	**2p**

SUBIECTUL II

$\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\cdot\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)=$	
$=\left(\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-a-b}{a}+\frac{a+b-a}{b}\right)\cdot\left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{b}{b-a-b}+\frac{b}{a+b-a}\right)=$	**3p**
$=\left(\frac{a-b}{a+b}-1+1\right)\left(\frac{a+b}{a-b}-1+1\right)=\frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{a+b}{a-b}=1$	**4p**

SUBIECTUL III

	**1p**
Fie $T\in(BC)$; $CT=\frac{1}{3}CB \Rightarrow TNAP$ paralelogram deoarece $\frac{NC}{AC}=\frac{CT}{CB}=\frac{1}{3}$ și $\frac{AB}{AB}=\frac{CT}{CB}=\frac{1}{3}$	**2p**
Din $TNAP$ paralelogram rezultă AT trece prin mijlocul lui $PN \Rightarrow A, E, T$ coliniare și E mijlocul lui AT, F mijlocul lui MT $\left(MF=FT=\frac{1}{6}BC\right)$	**2p**
EF linie mijlocie în $\Delta\, AMT \Rightarrow EF \parallel AM$ și $EF=\frac{1}{2}AM$	**2p**

SUBIECTUL IV

Fie $HH' \perp BC, EE' \perp DC, HH' \cap EE' = \{P\}, HF \cap EE' = \{Q\}, EG \cap HF = \{S\}$ $m(\sphericalangle HQP) = m(\sphericalangle SQE)$**(opuse la vârf)**$\Longrightarrow m(\sphericalangle PHQ) = m(\sphericalangle QES)$ **(aceleași complement)(1)** $EE' = HH' = AB = BC = CD = AD$**(2)** **Din (1),(2)** $\overset{CU}{\Longrightarrow} \Delta HH'F \equiv \Delta EE'G \Longrightarrow EG = FH$	**1p** **2p** **2p** **2p**