Soluții și barem de notare-clasa a XII a

1. a) $\int arctg\left(\frac{1}{x}\right)dx = xarctg\left(\frac{1}{x}\right)+\int\frac{x}{x^2+1}dx = xarctg\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C$ (2p)

b) $\int x^5\cdot\sqrt[3]{x^3+1}dx=\int x^2\left(x^3+1\right)\sqrt[3]{x^3+1}dx-\int x^2\cdot\sqrt[3]{x^3+1}dx=\frac{\sqrt[3]{\left(x^3+1\right)^7}}{7}-\frac{\sqrt[3]{\left(x^3+1\right)^4}}{4}+C$ (2p)

c) folosind schimbarea de variabilă $x=-t$ rezultă $I=\int_{-1}^{1}\frac{x^{2016}}{e^x+1}dx=\int_{-1}^{1}\frac{x^{2016}e^x}{e^x+1}dx=J$. Cum

$I+J=\frac{2}{2017}$, rezultă $I=\frac{1}{2017}$ (3p)

2. a) șirul este crescător (1p)

$a_n=\int_0^1 e^{-x^2}dx+\int_1^n e^{-x^2}dx\le\int_0^1 1dx+\int_1^n e^{-x}dx<1+\frac{1}{e},$ deci șirul este mărginit, deci convergent (3p)

b) Nu. De exemplu, $f:[0,\infty)\to[0,\infty),\ f(x)=\frac{1}{x+1}$ verifică faptul că $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0,$ dar

$x_n=\int_0^n f(x)dx=\ln(n+1)$ nu este convergent (3p)

3. a) $"*"$ este lege de compoziție pe G (1p)

$(G,*)$ este grup abelian (3p)

b) Se arată că dacă $x,a,b\in G$ și $a<b$ atunci $x*a<x*b$ (1p)

deducem că dacă $a,b,c,d\in G$ și $a<b, c<d$ atunci $a*c<b*d$ și, prin inducție, concluzia (2p)

4. a) $1=1-x^2=(1-x)(1+x)$, deci $1+x\in U(A)$ (2p)

b) Fie $y=-u^{-1}x$. Atunci $y^n=0$ (1p).

$1=1-y^n=(1-y)\left(1+y+\cdots+y^{n-1}\right)$, adică $1-y\in U(A)$ (2p).

Obținem $u+x=u(1-y)\in U(A)$ (2p)