INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN OLT

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2014

Clasa a X-a

Problema 1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{C}\setminus\{1\}\to\mathbb{C}$, $f(z)=\dfrac{z^2-z-2}{z-1}$.

Arătaţi că, dacă $z\neq 1$, atunci $f(z)\in\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $z\in\mathbb{R}$.

Problema 2. Rezolvaţi sistemul $\begin{cases}\sqrt[4]{x\sqrt{x}}-\sqrt[4]{y\sqrt{y}}=7\\ \sqrt[14]{x\sqrt{x\sqrt{x}}}+\sqrt[14]{y\sqrt{y\sqrt{y}}}=3\end{cases}$.

Gazeta Matematică nr. 9/2013

Problema 3. Determinaţi funcţiile $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ care satisfac condiţiile

$$xy\lg(xy)\leq yf(x)+xf(y)\leq f(xy),$$ pentru orice $x,y>0$.

Problema 4. Se consideră funcţia injectivă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că există $p\in\mathbb{R}$ astfel încât

$$f(xy)=f(x)f(y)+p,$$ pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

a) Arătaţi că $p=0$.

b) Demonstraţi că *f* este impară.

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ OLT

Etapa locală – 16 februarie 2014

CLASA A X-A

Problema 1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{C}\setminus\{1\}\to\mathbb{C}$, $f(z)=\dfrac{z^2-z-2}{z-1}$. Arătaţi că, dacă $z\neq 1$, atunci $f(z)\in\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $z\in\mathbb{R}$.

Soluţie. Fie $z\neq 1$. Deoarece $f(z)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow f(z)=\overline{f(z)}$, scriind $f(z)=z-\dfrac{2}{z-1}$, avem succesiv:

$$f(z)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z-\frac{2}{z-1}=\overline{z}-\frac{2}{\overline{z}-1}\Leftrightarrow z-\overline{z}+\frac{2(z-\overline{z})}{(z-1)(\overline{z}-1)}=0\Leftrightarrow (z-\overline{z})\left(1+\frac{2}{(z-1)(\overline{z}-1)}\right)=0.$$

Presupunând $1+\dfrac{2}{(z-1)(\overline{z}-1)}=0$, de unde $(z-1)(\overline{z}-1)+2=0$, adică $|z-1|^2+2=0$, imposibil.
Ca urmare, $f(z)\in\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $z-\overline{z}=0$, adică $z\in\mathbb{R}$.

Problema 2. Rezolvaţi sistemul $\begin{cases}\sqrt[4]{x\sqrt{x}}-\sqrt[4]{y\sqrt{y}}=7\\ \sqrt[14]{x\sqrt{x\sqrt{x}}}+\sqrt[14]{y\sqrt{y\sqrt{y}}}=3\end{cases}$.

Gazeta Matematică nr. 9/2013

Soluţie. Evident, $x,y\geq 0$. Sistemul se rescrie sub forma

$$\begin{cases}\sqrt[8]{x^3}-\sqrt[8]{y^3}=7\\ \sqrt[8]{x}+\sqrt[8]{y}=3\end{cases}.$$

Notând $\sqrt[8]{x}=a$, $\sqrt[8]{y}=b$, unde $a,b\geq 0$, rezultă $a+b=3$ şi $a^3-b^3=7$, ceea ce conduce la ecuaţia

$$a^3-(3-a)^3=7\Leftrightarrow 2a^3-9a^2+27a-34=0\Leftrightarrow (a-2)\left(2a^2-5a+17\right)=0.$$

Unica soluţie reală a ecuaţiei este $a=2$, pentru care se obţine $b=1$, $x=256$ şi $y=1$.

Problema 3. Determinaţi funcţiile care satisfac condiţiile

$$xy\lg(xy)\leq yf(x)+xf(y)\leq f(xy),\text{pentru orice } x,y>0.$$

Soluţie. Pentru $x=y=1$, din enunţ rezultă $0\leq 2f(1)\leq f(1)$, de unde $f(1)=0$.
Pentru $y=1$, relaţia din enunţ conduce la $x\lg x\leq f(x)$, pentru orice $x>0$. (1)
Pentru $y=\dfrac{1}{x}$, din enunţ se obţine $0\leq\dfrac{f(x)}{x}+xf\left(\dfrac{1}{x}\right)\leq 0$, deci $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\dfrac{f(x)}{x^2}$, pentru orice $x>0$. (2)
Pentru $y=\dfrac{1}{x}$, din (1) rezultă $\dfrac{1}{x}\lg\left(\dfrac{1}{x}\right)\leq f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, deci $f\left(\dfrac{1}{x}\right)\geq-\dfrac{\lg x}{x}$ şi, ţinând cont de (2), obţinem

$$-\frac{f(x)}{x^2}\geq-\frac{\lg x}{x}\Leftrightarrow f(x)\leq x\lg x,\quad \text{pentru orice } x>0. \tag{3}$$

Din (1) şi (3) rezultă că $f(x)=x\lg x$, pentru orice $x>0$, funcţie care satisface condiţia din enunţ.

Problema 4. Se consideră funcţia injectivă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că există $p\in\mathbb{R}$ astfel încât

$$f(xy)=f(x)f(y)+p,\ \text{pentru orice } x,y\in\mathbb{R}.$$

a) Arătaţi că $p=0$.
b) Demonstraţi că f este impară.

Soluţie. **a)** Pentru $y = 0$, rezultă $f(0) = f(x) f(0) + p$, de unde, presupunând $f(0) \neq 0$, ar rezulta că $f(x) = \dfrac{p - f(0)}{f(0)}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, adică f ar fi constantă, contradicţie cu f injectivă.

Ca urmare, $f(0) = 0$. Luând acum $x = y = 0$, din enunţ rezultă $p = 0$.

b) Conform punctului anterior, avem $f(xy) = f(x) f(y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. $(*)$

Pentru $x = y = 1$, avem $f(1) = f^2(1)$, de unde rezultă că $f(1) \in \{0, 1\}$. Cum f este injectivă şi $f(0) = 0$, rezultă $f(1) = 1$.

Pentru $x = y = -1$, rezultă $1 = f(1) = f^2(-1)$, deci $f(-1) \in \{-1, 1\}$. Cum f este injectivă şi $f(1) = 1$, rezultă $f(-1) = -1$.

Pentru $y = -1$, din relaţia $(*)$ rezultă $f(-x) = f(x) f(-1) = -f(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci este f este impară.