OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ- 22 februarie 2015

Clasa a X – a

SUBIECTUL I (7 p)

a) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația: $(3+2\sqrt{2})^x \leq 6\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)^x - 1$.

b) Să se rezolve ecuația $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}=\sqrt[10]{x+1023}$, x∈ℝ.

SUBIECTUL III (7 p)

Să se arate că:

a) $log_{a+1}a < log_{a+2}(a+1)$, pentru orice a$> 0$.

b) $log_5 4\cdot log_7 6\cdot \ldots \cdot log_{81}80 > \frac{1}{2}$.

SUBIECTUL II (7 p)

Fie A, B, C puncte distincte în plan, de afixe a,b,c.

Să se arate că, dacă $|2\cdot a-b-c|=|b-c|$ atunci triunghiul este dreptunghic.

SUBIECTUL IV (7 p)

a) Fie $\varepsilon=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ $și$ $z\in\mathbb{C}$. Demonstrați că $(z-1)^2+(z-\mathcal{E})^2+(z-\bar{\mathcal{E}})^2=3z^2$.

b) Dacă ABC este un triunghi echilateral de centru O și M este un punct în planul (ABC), deduceți inegalitatea: $MA^2+MB^2+MC^2\geq 3\cdot MO^2$.

NOTĂ: Timp de lucru 3 ore

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, 22 februarie 2015

BAREM DE CORECTARE

Clasa a X- a

SUBIECTUL I (7 p)

a) Inecuația este echivalentă cu: $(\sqrt{2}+1)^{2x}-6\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)^{x}+1\leq 0$.........**1p**

Notăm cu t=$\left(\sqrt{2}+1\right)^{x}>0\ \Rightarrow t^2-6t+1\leq 0$, care are ca soluții

$t\in\left[3-2\sqrt{2},3+2\sqrt{2}\right]\Longrightarrow\left(\sqrt{2}+1\right)^{-2}\leq\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)^{x}\leq\left(\sqrt{2}+1\right)^{2}$.................**1p**

Cum funcția exponențială f(x)= $\left(\sqrt{2}+1\right)^{x}$este strict crescătoare$\Longrightarrow$ x $\in[-2,2]$ **1p**

b) Găsește x=1 soluție...**1p**

Împarte cu $\sqrt[10]{x}$ și obține ecuația $\sqrt[5]{x^2}+\sqrt[30]{x^7}=\sqrt[10]{1+\frac{1023}{x}}$..............................**1p**

Observă că funcția x→ $\sqrt[5]{x^2}+\sqrt[30]{x^7}$ este crescătoare, iar x→$\sqrt[10]{1+\frac{1023}{x}}$

este o funcție descrescătoare ⇒ Cerința **2p**

SUBIECTUL II (7 p)

Relația este echivalentă cu: $\left|a-\frac{b+c}{2}\right|=\frac{|b-c|}{2}$..1p

Notează cu M mijlocul laturii BC...1p

Afixul lui M este $\frac{b+c}{2}$..1p

Distanța dintre B și C este $|b-c|$..1p

Rescrie egalitatea de mai sus AM=$\frac{BC}{2}$..1p

Deduce că A se află pe cercul de diametru BC..1p

Concluzia m(∢A)=90^0...1p

SUBIECTUL III (7 p)

Soluţie. a) Inegalitatea e echivalentă cu

$$\log_{a+1} a \cdot \log_{a+1}(a+2) < 1.$$ 1p

Să observăm că

$$\log_{a+1} a + \log_{a+1}(a+2) = \log_{a+1}(a^2+2a) < \log_{a+1}(a^2+2a+1) = 2,$$ 1p

şi atunci (∗) se obţine din inegalitatea mediilor 1p

b) Fie

$$A = \log_5 4 \cdot \log_7 6 \cdot \ldots \cdot \log_{81} 80$$ 1p

şi

$$B = \log_4 3 \cdot \log_6 5 \cdot \ldots \cdot \log_{80} 79.$$ 1p

Atunci din a) avem $A > B$ iar $AB = \frac{1}{4}$. Deducem $A > \frac{1}{2}$. 2p

SUBIECTUL IV (7 p)

a) $\{1, \varepsilon, \overline{\varepsilon}\} = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2\}$ este mulţimea rădăcinilor complexe de ordin trei ale unităţii 1p

$(\varepsilon^3 = 1, \overline{\varepsilon} = \varepsilon^2)$. $Avem\, 1 + \varepsilon + \overline{\varepsilon} = 0$ $şi$ $1^2 + \varepsilon^2 + \overline{\varepsilon}^2 = 1^2 + \varepsilon^2 + \varepsilon^4 = 1 + \varepsilon^2 + \varepsilon = 0$ $(\varepsilon^3 = 1)$ 1p

de unde $(z-1)^2 + (z-\varepsilon)^2 + (z-\overline{\varepsilon})^2 = 3z^2 + (1^2 + \varepsilon^2 + \overline{\varepsilon}^2) - 2z(1 + \varepsilon + \overline{\varepsilon}) = 3z^2$. 1p

b) Alegem un sistem de axe cu originea în O , Ox=OA şi unitatea de măsură OA=OB=OC. 1p

Punctele A,B,C au afixele

$1, \varepsilon$, *respectiv* $\overline{\varepsilon}$ *şi avem* $MA^2 + MB^2 + MC^2 = |z-1|^2 + |z-\varepsilon|^2 + |z-\overline{\varepsilon}|^2 \geq \left|(z-1)^2 + (z-\varepsilon)^2 + (z-\overline{\varepsilon})^2\right|$

$= 3|z|^2 = 3OM^2$ dacă z este afixul punctului M. 3p