



CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



Subiecte

Clasa a XI-a – Secțiunea H2 – Profil real, specializarea științe ale naturii

Subiectul 1.

O matrice $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ se numește prietena matricei $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ dacă $XY = X + 2024Y$.

1. Dacă $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ este prietena matricei $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ arătați că:

a) $(A - 2024I_2)(B - I_2) = 2024I_2$.

b) $AB = BA$.

2. Considerăm mulțimile:

$$G = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid A \text{ are cel puțin o prietenă}\} \text{ și } H = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid A \text{ nu are nici o prietenă}\}.$$

Arătați că mulțimile G și H sunt infinite.

Subiectul 2.

1. Considerăm determinantul $\Delta(m) = \begin{vmatrix} 2m-2 & m-2 & 1 \\ 4m-5 & m-3 & 1 \\ 6m-10 & -4 & -1 \end{vmatrix}, m \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $\Delta(m) = 2m^2 - 7m + 6$.

b) Demonstrați că pentru orice $x \in (0, \infty)$, $\Delta(x) + \Delta\left(\frac{1}{x}\right) \geq 2$.

c) Într-un reper cartezian xOy considerăm punctele $A_t(4t-5, t-3)$, $B_t(10-6t, 4)$ și $C_t(2t-2, t-2)$, $t \in \mathbb{R}$.
Demonstrați că există o infinitate de valori t , numere iraționale, pentru care aria triunghiului $A_tB_tC_t$ se exprimă printr-un număr natural.

Subiectul 3.

Fie \mathcal{F} mulțimea funcțiilor continue $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ care verifică condiția $f(f(x)) = x + 1$ pentru orice $x \in [0, \infty)$.

a) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = ax + b$ să fie în mulțimea \mathcal{F} .

b) Dacă $f \in \mathcal{F}$ arătați că $f(x+n) = f(x) + n$, pentru orice $x \in [0, \infty)$ și orice $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Dacă $f \in \mathcal{F}$, să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$.

d) Dacă $f \in \mathcal{F}$, să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(\{x\}) - \{x\}}{x}$, unde $\{x\}$ este partea fracționară a numărului x .

Subiectul 4.

Într-o zi de vacanță, Ionuț merge pe un traseu montan între două localități A și B . La dus pleacă din A către B , la ora 8 și străbate traseul în 4 ore. Notăm cu $f(t)$ lungimea drumului parcurs de Ionuț la ora $t \geq 8$. A doua zi, la întors pleacă din B către A , la ora 8 și străbate traseul în 4 ore. Notăm cu $g(t)$ lungimea drumului parcurs de acesta la ora t .
 t este măsurat în ore iar $f(t)$ și $g(t)$ în metri.

1. Considerând $f(t) = 10t^3 - 80t^2$ iar $g(t) = 120t^2 - 960t$ se cere:

a) Lungimea traseului.

b) Dacă după 3 ore, la dus, Ionuț ajunge în punctul C , iar la întors ajunge în punctul D , aflați distanța dintre C și D .

2. Considerând că funcțiile f și g sunt continue arătați că există, între A și B , un punct X în care Ionuț a fost la aceeași oră, atât la dus cât și la întors.