INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN DÂMBOVIŢA

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 23.02.2014

CLASA a VI-a

SUBIECTUL 1

a) Verificaţi dacă 13 divide 222222.
b) Un număr natural A are 2001 cifre dintre care una este 1, iar toate celelalte sunt egale cu 2. Arătaţi că A nu este număr prim.

GM 11/2013(SUPLIMENT)

SUBIECTUL 2

Determinaţi numerele prime distincte a, b, c, pentru care $ab + bc + ca + 67abc = 2041$.

GM 1/2013

SUBIECTUL 3

Unghiurile AOB şi COD sunt neadiacente şi au interioarele disjuncte, iar [OB este bisectoarea unghiului AOC. Ştiind că $m(\sphericalangle COD)$ este cu 12^0 mai mică decât $m(\sphericalangle COB)$ şi că unghiul format de bisectoarele [OX şi [OY ale unghiurilor AOB şi COD are măsura de 78^0, aflaţi câte grade are unghiul YOA.

RMT 4/2009

SUBIECTUL 4

Se consideră triunghiul ABC, cu AB = AC. O dreaptă d ce conţine vârful A formează cu cele două laturi AB şi AC, în exteriorul triunghiului, două unghiuri congruente. Dacă D este un punct pe bisectoarea unghiului A, din interiorul triunghiului şi $CD \cap d = \{M\}$, $BD \cap d = \{N\}$, demonstraţi că AM = AN şi $\sphericalangle BMC \equiv \sphericalangle BNC$.

Prof. Damian Marinescu

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.
Timp de lucru: 2 ore.

CLASA a VI-a

SUBIECTUL 1

a) **Verificaţi dacă 13 divide 222222.**

b) **Un număr natural A are 2001 cifre dintre care una este 1, iar toate celelalte sunt egale cu 2. Arătaţi că A nu este număr prim.**

a) 222222 = 13· 17094, rezultă că 13 | 222222.	**1p**
b) Singurul număr care trebuie arătat că nu este prim este cel cu ultima cifră 1, celelalte care au cifra 1 pe altă poziţie nu sunt prime având ultima cifră 2.	**2p**
Fie numărul A = $\underbrace{22\ldots21}_{2001\ \text{cifre}} = \underbrace{22\ldots2}_{1998\ \text{cifre}} \cdot 1000 + 221$.	**1p**
Deoarece 1998 = $\mathcal{M}_6$, rezultă din a) că $\underbrace{22\ldots2}_{1998\ \text{cifre}} = \mathcal{M}_{13}$.	**2p**
Cum 221 = $\mathcal{M}_{13}$, rezultă A este divizibil cu 13, deci nu este prim.	**1p**

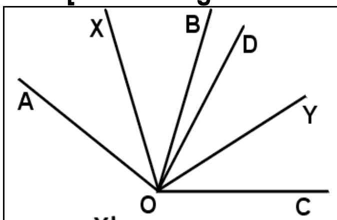
SUBIECTUL 2

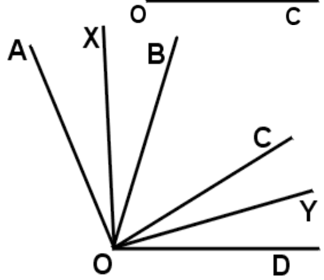
Determinaţi numerele prime distincte a, b, c, pentru care ab + bc + ca + 67abc = 2041.

Putem presupune a < b < c. Numerele a, b, c nu pot fi toate impare pentru că atunci suma ar fi un număr par.	**2p**
Cel puţin unul dintre numere este par, iar acesta este a=2.	**1p**
Relaţia devine 2b + bc + 2c + 134bc = 2041, sau 2(b + c) + 135bc = 2041.	**1p**
Pentru b>3 şi c>5 avem 2(b + c) + 135bc > 2· 8 + 135· 15 = 2041.	**2p**
Rezultă b = 3 şi c = 5. Cele trei numere sunt: 2, 3, 5(cu permutările lor). Sau (a, b, c)$\in${(2, 3, 5), (2, 5, 3), (3, 2, 5), (3, 5, 2), (5, 2, 3), (5, 3, 2)}.	**1p**

SUBIECTUL 3

Unghiurile AOB şi COD sunt neadiacente şi au interioarele disjuncte, iar [OB este bisectoarea unghiului AOC. Ştiind că m(∢COD) este cu 12^0 mai mică decât m(∢COB) şi că unghiul format de bisectoarele [OX şi [OY ale unghiurilor AOB şi COD are măsura de 78^0, aflaţi câte grade are unghiul YOA.



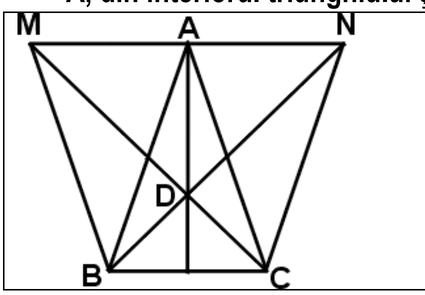


Problema are două soluţii, după cum D$\in$Int(∢BOC) sau C$\in$Int(∢BOD). **Pentru D$\in$Int(∢BOC).** Notăm m(∢YOD) = m(∢YOC) = x. Avem: m(∢BOD) = 12^0.	**1p**
m(∢AOB) = m(∢BOC) = 2x + 12^0 şi m(∢BOX) = x + 6^0.	**1p**
Se obţine ecuaţia: x + 12^0 + x + 6^0 = 78^0, de unde x = 30^0. Şi atunci m(∢YOA) = m(∢YOD) + m(∢BOD) + m(∢BOA) = 30^0 + 12^0 + 72^0 = 114^0.	**2p**
Pentru C$\in$Int(∢BOD). Notând m(∢YOD) = m(∢YOC) = x. m(∢AOB) = m(∢BOC) = 2x + 12^0 şi m(∢BOX) = x + 6^0.	**1p**
Se obţine ecuaţia: x + 2x + 12^0 + x + 6^0 = 78^0, de unde x = 15^0. Şi atunci m(∢YOA) = m(∢YOC) + 2· m(∢BOC) = 15^0 + 2· 42^0 = 99^0.	**2p**

OBS. Pentru rezolvarea completă a unui singur caz se acordă 4p.

SUBIECTUL 4

Se consideră triunghiul ABC, cu AB = AC. O dreaptă d ce conţine vârful A formează cu cele două laturi AB şi AC, în exteriorul triunghiului, două unghiuri congruente. Dacă D este un punct pe bisectoarea unghiului A, din interiorul triunghiului şi CD ∩ d = {M}, BD ∩ d = {N}, demonstraţi că AM = AN şi ∢BMC≡∢BNC.



ΔABD≡ΔACD(LUL) ⇒ ∢ABD≡∢ACD.	**1p**
ΔABN≡ΔACM(ULU) ⇒ AM = AN.	**2p**
Din congruenţa anterioară, rezultă ∢AMC≡∢ANB(1),	**1p**
ΔABM≡ΔACN(LUL) ⇒ ∢AMB≡∢ANC(2).	**2p**
Din (1) şi (2), rezultă ∢BMC≡∢BNC.	**1p**