OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ-15.02.2014
CLASA VI

Subiectul I

1.Aflați cel mai mare divizor comun al numerelor $a = 3^{n+1} \cdot 7^n + 4$ și $b = 3^n \cdot 7^{n+1} + 6$,unde n este un număr natural.

Gazeta Matematică 11/2012

2. a)Demonstrați că dacă p este număr prim, $p > 5$ atunci u$(p^4) = 1$.
(Se notează cu u(n)ultima cifră a numărului natural n).
b)Arătați că nu există numere prime p , $p > 5$ astfel încât să avem că $p^8 + p^4 + p = \underbrace{\overline{1717 \cdots 17}}_{2014\ cifre}$

Prof.Buzescu Antoanela

Subiectul II

Câte numere naturale cel mult egale cu 2014 sunt divizibile cu 19 şi au exact 8 divizori?

Prof.Pîrvu Camelia

Subiectul III

Segmentul $[AB]$ are lungimea egală cu 55. Punctele $M_1, M_2, \dots, M_9$ împart segmentul $[AB]$ în 10 segmente $[AM_1]$, $[M_1M_2]$, ... $[M_9B]$ ale căror lungimi sunt egale cu numere naturale nenule distincte.

a)Arătați că există puncte $M_1, M_2, \dots, M_9$cu proprietatea din enunț.

b)Să se arate că mijlocul lui $[AB]$ nu coincide cu niciunul din punctele $M_1, M_2, \dots, M_9$.

Prelucrare concurs „Jose Marti”

Subiectul IV

Bisectoarele unghiurilor adiacente$\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ formează un unghi cu măsura de$10°$.

a)Arătați că $80° < 5m(\sphericalangle AOB) + 4m(\sphericalangle BOC) < 100°$

b)Dacă $5m(\sphericalangle AOB) + 4m(\sphericalangle BOC) = 90°$arătați că $[OB$ este bisectoarea $\sphericalangle AOC$.

(***)

NOTĂ:Timp de lucru 2 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se punctează cu 7 puncte.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ-15.02.2014
BAREM DE CORECTARE
CLASA VI

Subiectul I

1.Fie $d = (a, b)$,deci d/a , d/b , d / $(7a - 3b)$……………………..1p.
$7a - 3b = 10, d$ / $10 \Rightarrow d \in \{1,2,5,10\}$……………………… ...1p.
a, b sunt impare,deci $d \in \{1,5\}$…………………………………….1p.
cum u$(a) = 7 \Rightarrow d = 1$…………………………………………..1p.

2a)p este prim,$p > 5$,atunci u$(p) \in \{1,3,7,9\}$,
u$(p^2) \in \{1,9\}$, u$(p^4) = 1$……………………………………….1p.
b) din $p^8 + p^4 + p = p^4(p^4 + 1) + p$, avem că u$(p) = 5$………….1p.
$p \vdots 5, p > 5$,deci p nu este prim,fals……………………………..1p

Subiectul II

Numerele căutate sunt de forma $n = a \cdot b \cdot 19$, $n = c^3 \cdot 19$,respectiv
$n = d \cdot 19^3$,unde a, b, c, d factori primi,diferiți de 19………………..2p
$n = d \cdot 19^3 \leq 2014$, nu are soluții……………………………………………..1p
$n = c^3 \cdot 19 \leq 2014 \Longrightarrow c^3 \leq 106 \Rightarrow c \in \{2,3\}$…………………………..1p
$n = a \cdot b \cdot 19 \leq 2014 \Rightarrow a \cdot b \leq 106$…………………………………….1p
(a, b) poate fi
(2,3), (2,5), (2,7), (2,11), (2,13), (2,17), (2,23), (2,29), (2,31), (2,37),
(2,41),(2,43),(2,47),(2,53),(3,5),(3,7),(3,11),(3,13),(3,17),(3,23),(3,29),
(3,31),(5,7),(5,11),(5,13),(5,17),(7,11),(7,13)………………………….1p
finalizare, 30 de numere……………………………………………1p

Subiectul III

a)Din $AB = 55, AM_1, \cdots, M_9B \in \mathbb{N}^*$,distincte ,iar $1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = 55$, deduce că $\{AM_1, M_1M_2, \ldots, M_9B\} = \{1,2, \ldots, 10\}$…………………………………………………………………….3p
b)Fie O mijlocul segmentului $[AB]$,atunci $AO = \frac{55}{2}$…………………. 1p
Dacă $O \in \{M_1, M_2, \ldots, M_9\}$ atunci AO ar fi sumă de numere naturale….2p
Finalizare……………………………………………………….1p

Subiectul IV

Deduce $m(\sphericalangle AOC) = 20°$……………………………………….1p
$5m(\sphericalangle AOB) + 4m(\sphericalangle BOC) = 4m(\sphericalangle AOC) + m(\sphericalangle AOB) > 80°$……2p
dar, $5m(\sphericalangle AOB) + 4m(\sphericalangle BOC) = 5m(\sphericalangle AOC) - m(\sphericalangle BOC) < 100°$
………………………………………………………………….2p
Deduce $m(\sphericalangle AOB) = 10°, m(\sphericalangle BOC) = 10°$………………………..1p
Finalizare……………………………………………………….1p

Notă: Orice altă soluție se punctează corespunzător