OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 19.02.2016 –

CLASA A V-A
SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1. Produsul a două numere este 540. Dacă primul număr s-ar mări cu 5, atunci produsul lor ar fi 600. Aflați numerele.

Soluție:
Notăm a și b cele două numere. Avem $a \cdot b = 540$, (1) și $(a+5) \cdot b = 600$, (2).
Din (1) și (2) avem $a \cdot b + 5 \cdot b = 600 \Leftrightarrow 540 + 5 \cdot b = 600 \Leftrightarrow 5 \cdot b = 60 \Leftrightarrow b = 12$
Cum $a \cdot 12 = 540 \Leftrightarrow a = 45$. Numerele căutate sunt 45 și 12.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Notează a și b cele două numere ………………………………………………………...	1 p
Scrie relațiile: $a \cdot b = 540$ și $(a+5) \cdot b = 600$ ………………………………………………..	2 p
Obține $b = 12$ și $a = 45$ ………………………………………………………………...	4p

Subiectul 2. Fie numărul natural $n = \overline{11\ldots1} + \overline{22\ldots2} + \ldots + \overline{88\ldots8} + \overline{99\ldots9}$, fiecare număr de forma $\overline{aa\ldots a}$ conținând câte 2015 cifre de a. Determinați câte cifre de 9 conține numărul n.

Soluție:
$n = 1 \cdot \overline{11\ldots1} + 2 \cdot \overline{11\ldots1} + 3 \cdot \overline{11\ldots1} + \ldots + 8 \cdot \overline{11\ldots1} + 9 \cdot \overline{11\ldots1}$
$= (1+2+3+\ldots+8+9) \cdot \overline{11\ldots1} = 45 \cdot \overline{11\ldots1}$.
Obținem $n = \overline{499\ldots95}$, număr ce are 2016 cifre. Deci n conține 2014 de 9.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Deduce că $n = (1+2+3+\ldots+8+9) \cdot \overline{11\ldots1} = 45 \cdot \overline{11\ldots1}$ …………………………...	3 p
Obține că $n = \overline{499\ldots95}$ ………………………………………………………………...	2 p
Precizează că numărul n are 2016 cifre de unde deduce că n conține 2014 de 9……………..	2 p

Subiectul 3. Se consideră 5 numere naturale cu media aritmetică egală cu 24. Împărțind pe rând primul număr la suma dintre al doilea și al treilea, apoi al doilea număr la suma dintre al treilea și al patrulea, iar la final pe al treilea la suma dintre al patrulea și al cincilea se obține de fiecare dată câtul 2 și restul 1. Știind că ultimele două numere sunt consecutive, aflați numerele.

Soluție:
Notăm primul număr cu x, al doilea număr cu y, al treilea număr cu z, al patrulea număr cu t, al cincilea număr cu u.
Avem $(x+y+z+t+u) : 5 = 24$ de unde avem suma $x+y+z+t+u = 5 \cdot 24 = 120$, (1)
Folosind teorema împărțirii cu rest obținem:

$x : (y+z) = 2 \; rest \; 1 \Longrightarrow x = 2(y+z)+1, \quad 1 < y+z$, (2);
$y : (z+t) = 2 \; rest \; 1 \Longrightarrow y = 2(z+t)+1, \quad 1 < z+t$, (3);
$z : (t+u) = 2 \; rest \; 1 \Longrightarrow z = 2(t+u)+1, \quad 1 < t+u$, (4).

Cum $u = t + 1$ obținem din (4) că $z = 2(t + t + 1) + 1 = 4t + 3$. Din ultima relație și (3) se obține $y = 2(4t + 3 + t) + 1 = 10t + 7$. Din (2) obținem $x = 2(10t + 7 + 4t + 3) + 1 = 28t + 21$.
Din ultimele relații si din (1) avem:

$$28t + 21 + 10t + 7 + 4t + 3 + t + t + 1 = 120 \Leftrightarrow 44t = 88 \Leftrightarrow t = 2$$

Avem $x = 28 \cdot 2 + 21 = 77$, $y = 10 \cdot 2 + 7 = 27$, $z = 4 \cdot 2 + 3 = 11$ și $u = 2 + 1 = 3$

Detalii rezolvare	Barem asociat
Notează primul număr cu x, al doilea număr cu y, al treilea număr cu z, al patrulea număr cu t, al cincilea număr cu u	1 p
Din $(x + y + z + t + u):5 = 24$ deduce $x + y + z + t + u = 120$, (1)	1 p
Folosește teorema împărțirii și obține relațiile: $x = 2(y + z) + 1$, $y = 2(z + t) + 1$, $z = 2(t + u) + 1$	1 p
Precizează că $u = t + 1$ și deduce că $z = 4t + 3$, $y = 10t + 7$ și $x = 28t + 21$	1 p
Folosește în (1) relațiile obținute și determină $t = 2$	1 p
Calculează $x = 77$, $y = 27$, $z = 11$ și $u = 3$	1 p
Cazul $u = t - 1$ nu convine	1 p

Subiectul 4. Determinați numerele $\overline{ab}$ pentru care $\overline{ba} + \overline{ab}$ și $\overline{ba} - \overline{ab}$ sunt pătrate perfecte.

Soluție:

Avem $\overline{ba} + \overline{ab} = 11(a + b)$ și $\overline{ba} - \overline{ab} = 9(b - a)$. Pentru ca $\overline{ba} + \overline{ab}$ și $\overline{ba} - \overline{ab}$ să fie pătrate perfecte trebuie ca $b + a = 11$ și $b - a \in \{1,\ 4,\ 9\}$. Avem cazurile:

1) $\left.\begin{array}{l} b + a = 11 \\ b - a = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2b = 12 \Rightarrow b = 6$ și $a = 11 - 6 = 5$.

2) $\left.\begin{array}{l} b + a = 11 \\ b - a = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow 2b = 15 \Rightarrow b \notin \mathbb{N}$, cazul nu convine.

3) $\left.\begin{array}{l} b + a = 11 \\ b - a = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow 2b = 20 \Rightarrow b = 10$, cum b este cifră acest caz nu convine.

Singura variantă este $a = 5$ și $b = 6$ de unde avem $\overline{ab} = 56$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Deduce că $\overline{ba} + \overline{ab} = 11(a + b)$ și $\overline{ba} - \overline{ab} = 9(b - a)$	2 p
Precizează că $b + a = 11$ și $b - a \in \{1,\ 4,\ 9\}$.	2 p
Demonstrează că singura variantă este $a = 5$ și $b = 6$ de unde $\overline{ab} = 56$	3 p