



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Județeană și a Municipiului București, 14 martie 2015

CLASA a V-a

Problema 1. Determinați toate numerele naturale de două cifre \overline{ab} , cu $a < b$, care sunt egale cu suma numerelor naturale cel puțin egale cu a și cel mult egale cu b .

Problema 2. La un concurs de matematică, la care participă 50 de elevi, se oferă spre rezolvare 3 probleme. Știind că fiecare elev a rezolvat cel puțin o problemă și că numărul de soluții corecte ale tuturor concurenților este 100, arătați că numărul celor care au rezolvat corect toate cele trei probleme este cel mult 25.

Problema 3. Mulțimea numerelor naturale nenule se împarte în submulțimi astfel:

$$\{1, 2\} , \{3, 4, 5\} , \{6, 7, 8, 9\} , \dots$$

- Aflați cel mai mic element din cea de-a 100-a submulțime.
- Este 2015 cel mai mare element al unei astfel de submulțimi?

Gazeta Matematică

Problema 4. a) Arătați că ultimele trei cifre ale numărului 1038^2 sunt egale cu 4.

b) Arătați că există o infinitate de pătrate perfecte ale căror ultime trei cifre sunt egale cu 4.

c) Demonstrați că nu există pătrate perfecte care să aibă ultimele patru cifre egale cu 4.

*Timp de lucru 2 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Județeană și a Municipiului București, 14 martie 2015

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a V-a

Problema 1. Determinați toate numerele naturale de două cifre \overline{ab} , cu $a < b$, care sunt egale cu suma numerelor naturale cel puțin egale cu a și cel mult egale cu b .

Soluție

Conform relației din enunț, avem $\overline{ab} = a + (a + 1) + \dots + b$ și, cum $a + (a + 1) + \dots + b \leq 1 + 2 + \dots + 9 = 45$, rezultă $a \leq 4$ **3p**

Pentru $a = 4$, rezultă $\overline{ab} \geq 45 = 1 + 2 + \dots + 9$, deci ar trebui ca $a = 1$ (și $b = 9$), nu convine **1p**

Dacă $a = 3$ obținem $3 + 4 + \dots + (b - 1) + b = \overline{3b} = 30 + b$. Scăzând b și adunând $1 + 2$ în ambii membri, rezultă $1 + 2 + \dots + (b - 1) = 32$, de unde $(b - 1) \cdot b = 64$, egalitate care nu se realizează pentru nicio valoare $b \in \{4, 5, \dots, 9\}$ **1p**

Dacă $a = 2$, atunci $2 + 3 + \dots + (b - 1) + b = \overline{2b} = 20 + b$. Scăzând b și adunând 1 în ambii membri, rezultă $1 + 2 + \dots + (b - 1) = 21$, de unde $(b - 1) \cdot b = 42$.

Cum $6 \cdot 7 = 42$, egalitatea are loc pentru $b = 7$, deci un număr care satisface condiția din enunț este $\overline{ab} = 27$ **1p**

Pentru $a = 1$ obținem $1 + 2 + \dots + (b - 1) + b = \overline{1b} = 10 + b$, de unde $1 + 2 + \dots + (b - 1) = 10$ sau $(b - 1) \cdot b = 20$.

Egalitatea precedentă se verifică pentru $b = 5$, deci și $\overline{ab} = 15$ satisface condiția din enunț **1p**

Problema 2. La un concurs de matematică, la care participă 50 de elevi, se oferă spre rezolvare 3 probleme. Știind că fiecare elev a rezolvat cel puțin o problemă și că numărul de soluții corecte ale tuturor concurenților este 100, arătați că numărul celor care au rezolvat corect toate cele trei probleme este cel mult 25.

Soluție

Fie a, b, c numărul elevilor care au rezolvat corect exact una, două, respectiv trei probleme.

Atunci $a + b + c = 50$ și $a + 2b + 3c = 100$ **2p**

Rezultă $b + 2c = 50$ **2p**

Atunci $2c \leq 50$, deci $c \leq 25$ **3p**

Problema 3. Mulțimea numerelor naturale nenule se împarte în submulțimi astfel:

$$\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}, \{6, 7, 8, 9\}, \dots$$

a) Aflați cel mai mic element din cea de-a 100-a submulțime.

b) Este 2015 cel mai mare element al unei astfel de submulțimi?

Gazeta Matematică

Soluție

a) Primele 99 de submulțimi conțin $2 + 3 + \dots + 100 = 5049$ de elemente **2p**

În primele 99 de submulțimi sunt scrise numerele de la 1 la 5049, deci cel mai mic element al celei de-a 100-a submulțimi este 5050 **1p**

b) 2015 este cel mai mare element al celei de-a n -a submulțimi dacă $2 + 3 + \dots + (n + 1) = 2015$.. **1p**

Adunând 1 în ambii membri rezultă $(n + 1)(n + 2) = 2 \cdot 2016 = 4032$ **2p**

Cum $63 \cdot 64 = 4032$, rezultă că 2015 este cel mai mare element al celei de-a 62-a submulțimi **1p**

Problema 4. a) Arătați că ultimele trei cifre ale numărului 1038^2 sunt egale cu 4.

b) Arătați că există o infinitate de pătrate perfecte ale căror ultime trei cifre sunt egale cu 4.

c) Demonstrați că nu există pătrate perfecte care să aibă ultimele patru cifre egale cu 4.

Soluție

a) $1038^2 = 1077444$ **1p**

b) Ridicând la pătrat un număr ale cărui ultime trei cifre sunt 038 se obține un număr care se termină cu trei cifre de 4, după cum se vede din înmulțirea de mai jos **1p**

$$\begin{array}{r}
 \dots \dots \dots 0 \ 3 \ 8 \ \times \\
 \dots \dots \dots 0 \ 3 \ 8 \\
 \hline
 \dots \dots \dots 3 \ 0 \ 4 \\
 \dots \dots \dots 1 \ 4 \\
 \hline
 \dots \dots \dots 4 \ 4 \ 4
 \end{array}$$

Sunt o infinitate de numere care se termină în 038, deci sunt o infinitate de pătrate perfecte terminate cu trei cifre de 4 **1p**

c) Fie a un număr natural al cărui pătrat se termină în patru cifre de 4; atunci a este par, $a = 2b$. În plus, a^2 are forma $10000k + 4444$, $k \in \mathbb{N}$, deci $4b^2 = a^2 = 4(2500k + 1111)$, de unde rezultă că ultimele două cifre ale lui b^2 sunt egale cu 1 **1p**

Ultima cifră a lui b este 1 sau 9 **1p**

Analizând înmulțirile

$$\begin{array}{r}
 \dots \dots \dots n \ 1 \ \times \\
 \dots \dots \dots n \ 1 \\
 \hline
 \dots \dots \dots n \ 1 \\
 \dots \dots \dots n \\
 \hline
 \dots \dots \dots u \ 1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \dots \dots \dots m \ 9 \ \times \\
 \dots \dots \dots m \ 9 \\
 \hline
 \dots \dots \dots p \ 1 \\
 \dots \dots \dots p \\
 \hline
 \dots \dots \dots v \ 1
 \end{array}$$

rezultă că u este ultima cifră a lui $2n$, iar v este ultima cifră a lui $2p$, deci sunt cifre pare **1p**

Așadar, penultima cifră a lui b^2 este pară, deci nu poate fi egală cu 1. Ca urmare, nu există pătrate perfect terminate în patru cifre de 4 **1p**