OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 09.02.2013 –
CLASA A XI-A
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1. Prelucrare prof. *Ovidiu Şontea*, Bucureşti

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $\lvert c_{n+1}-\sqrt{2}\rvert = \left\lvert \frac{a_n+2b_n-a_n\sqrt{2}-b_n\sqrt{2}}{a_n+b_n}\right\rvert = (\sqrt{2}-1)\left\lvert\frac{a_n-b_n\sqrt{2}}{a_n+b_n}\right\rvert$	**2 puncte**
$\lvert c_{n+1}-\sqrt{2}\rvert = (\sqrt{2}-1)\frac{b_n}{a_n+b_n}\lvert c_n-\sqrt{2}\rvert \le \frac{1}{2}\lvert c_n-\sqrt{2}\rvert$	**2 puncte**
b) Calculul de la a) arată că dacă $c_n-\sqrt{2}\neq 0$, atunci $c_n-\sqrt{2}$ şi $c_{n+1}-\sqrt{2}$ au semne opuse. Astfel, dacă $c_1-\sqrt{2}\neq 0$, atunci termenii şirului $(c_n)_{n\ge1}$ se află alternativ de o parte şi de cealaltă a lui $\sqrt{2}$, deci şirul nu este monoton; în cazul $c_1-\sqrt{2}=0$ şirul este constant (deci monoton)	**3 puncte**

Subiectul 2. Prof. *George Stoica*, Canada

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $A_n=2n^2$ pentru n par şi $A_n=2(n-1)^2$ pentru $n>1$ impar	**1 punct**
$A_nx_n=1/n\to 0$ pentru n par şi $A_nx_n=(1-1/n)^2\to 1$ pentru n impar, deci (A_nx_n) nu este convergent	**2 puncte**
b) Şirul $(A_n)_n$ este crescător, deci are o limită $l>-\infty$	**1 punct**
Dacă l este finită, atunci concluzia este evidentă	**1 punct**
Dacă $l=+\infty$, atunci relaţiile $i_1=1$, $i_{n+1}=\min\{k\mid a_k>a_{i_n}\}$ definesc un şir strict crescător de numere naturale. În plus, dacă $i_m\le n<i_{m+1}$, atunci $a_{i_m}=A_{i_m}=A_{i_m+1}=\ldots=A_n$. Dacă pentru fiecare $n\ge1$ considerăm acel unic i_m pentru care $i_m\le n<i_{m+1}$, obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} i_m=\infty$, $A_nx_n=a_{i_m}x_n\le a_{i_m}x_{i_m}$, iar şirul $(a_{i_m}x_{i_m})_{m\ge1}$ tinde la 0, fiind un subşir al şirului $(a_nx_n)_{n\ge1}$. Cum, pe de altă parte, $A_nx_n\ge A_1x_n$ şi $(A_1x_n)_n\to 0$, concluzia rezultă imediat	**2 puncte**

Subiectul 3. Prelucrare Gazeta Matematică nr. 12/2012, prof. *Petre Dicu*, Sibiu

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Dacă $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$, $B=(b_{ij})_{1\le i,j\le n}$ şi $AB=(c_{ij})_{1\le i,j\le n}$, atunci $c_{ii}=\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki}$	**1 punct**
Rezultă $\mathrm{tr}AB=\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki}=\sum_{k=1}^n\sum_{i=1}^n a_{ik}b_{ki}=\mathrm{tr}BA$	**1 punct**
b) Din a) reiese $x+y=30$	**1 punct**
$\det(AB)=\det(A)\det(B)=\det(BA)\Rightarrow xy=200$, deci sunt posibile cazurile $(x_1=10,y_1=20)$ sau $(x_2=20,y_2=10)$	**2 puncte**
Se obţin ambele perechi: $A_1=\begin{pmatrix}10&30\\2&10\end{pmatrix}$, $B_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$; $A_2=\begin{pmatrix}2&5\\0&1\end{pmatrix}$, $B_2=\begin{pmatrix}5&5\\2&10\end{pmatrix}$	**2 puncte**

Subiectul 4. Prelucrare prof. *Mihail Bălună*, Bucureşti

Detalii rezolvare	Barem asociat
Permutarea $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&4&2&5&3&6\end{pmatrix}$ aplicată liniilor şi apoi coloanelor transformă determinantul matricei iniţiale într-un determinant egal, de forma $D'=\begin{vmatrix}D&O_3\\O_3&D^t\end{vmatrix}$, unde $D=\begin{vmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{vmatrix}$ şi O_3 este matricea nulă	**2 puncte**
$D'=DD^t=D^2$	**2 puncte**
$D=a^3+b^3+c^3-3abc>0$, conform inegalităţii mediilor, deci matricea are determinantul nenul	**3 puncte**

Observaţie. Existenţa inversei se poate argumenta şi dovedind că există o matrice X de aceeaşi formă cu cea iniţială, astfel încât $AX=XA=I_6$.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 09.02.2013 –
CLASA A XI-A
SUBIECTELE

Problema 1. Se consideră şirurile de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ şi $(c_n)_{n\geq 1}$ definite prin

$$a_1 > 0, b_1 > 0, a_{n+1} = a_n + 2b_n, b_{n+1} = a_n + b_n, c_n = \frac{a_n}{b_n}$$

oricare ar fi n natural nenul.

a) Să se arate că $|c_{n+1} - \sqrt{2}\,| \leq \frac{1}{2}\,|c_n - \sqrt{2}\,|$, oricare ar fi n natural nenul.

b) Să se arate că dacă şirul $(c_n)_{n\geq 1}$ este monoton, atunci el este constant.

Problema 2. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale şi $A_n = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se studieze convergenţa şirului $(A_n x_n)_{n\geq 1}$ în cazul

$$a_n = n^2 + n + (-1)^n(n^2 - n), \quad x_n = \frac{1}{na_n}, \forall n \geq 1.$$

b) Să se arate că, dacă $(x_n)_n$ este un şir descrescător astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_n = 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} A_n x_n = 0$.

Problema 3. a) Să se arate că, dacă n este un număr natural nenul, atunci pentru orice două matrice $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ are loc relaţia $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, unde $\mathrm{tr}(X)$ desemnează suma elementelor de pe diagonala prinicipală a matricei pătrate X (*urma* matricei X).

b) Determinaţi toate perechile de numere reale (x, y) pentru care există două matrice $A, B \in M_2(\mathrm{R})$ astfel încât

$$AB = \begin{pmatrix} x & 60 \\ 2 & y \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad BA = \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}.$$

Problema 4. Fie a, b, c numere reale strict pozitive şi nu toate egale. Să se arate că matricea

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 & c & 0 \\ 0 & a & 0 & c & 0 & b \\ c & 0 & a & 0 & b & 0 \\ 0 & b & 0 & a & 0 & c \\ b & 0 & c & 0 & a & 0 \\ 0 & c & 0 & b & 0 & a \end{pmatrix}$$

este inversabilă.

Toate subiectele sunt obligatorii şi se notează cu puncte de la 0 la 7

Timp de lucru: 3 ore