



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16 februarie 2013

Clasa a VIII-a

SUBIECTUL I (7p)

- 3p) 1. Fie $x = \sqrt{47 - \sqrt{2013}} - \sqrt{47 + \sqrt{2013}}$. Calculați x^2 și partea întreagă a numărului x .
- 4p) 2. Dacă numărul real pozitiv x verifică egalitatea $x - \frac{1}{x} = \sqrt{5}$ să se arate că numărul $a = x^{-4} + x^{-3} + x^{-2} + x^{-1} + x^1 + x^2 + x^3 + x^4$ este natural.

SUBIECTUL II (7p)

- 3p) a) Fie a și b două numere reale pozitive. Arătați că $a\sqrt{a} + b\sqrt{b} \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$.
b) Arătați că, pentru orice număr natural nenul n , are loc inegalitatea:
- 4p)
$$\frac{1}{2\sqrt{2} + 1\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1} + n\sqrt{n}} < 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

SUBIECTUL III (7p)

- În tetraedrul oarecare $ABCD$, G_1 , G_2 și G_3 sunt centrele de greutate ale fețelor ABC , ABD și, respectiv, ACD .
- 4p) a) Demonstrați că $(G_1G_2G_3) \parallel (BCD)$.
- 3p) b) Aflați valoarea raportului ariilor triunghiurilor $\Delta G_1G_2G_3$ și ΔBCD .

SUBIECTUL IV (7p)

- Fie $ABCD A'B'C'D'$ o prismă patrulateră dreaptă, cu bazele pătrate, în care $AA' = AB\sqrt{2}$ și M , N sunt, respectiv, mijloacele segmentelor $[BB']$, $[DD']$.
- 4p) a) Arătați că $A'B \perp (AMD)$;
- 3p) b) Arătați că dreapta de intersecție a planelor (AMD) și (ANB) este perpendiculară pe planul $(A'BD)$.

Gazeta Matematică

Subiecte selectate și prelucrate de prof. Constantin Guriță

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Timp de lucru: 3 ore

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013

Barem de corectare,

clasa a VIII-a

Subiectul I

1. Fie $x = \sqrt{47 - \sqrt{2013}} - \sqrt{47 + \sqrt{2013}}$. Calculați x^2 și partea întreagă a numărului x .
2. Dacă numărul real pozitiv x verifică egalitatea $x - \frac{1}{x} = \sqrt{5}$ să se arate că numărul $a = x^{-4} + x^{-3} + x^{-2} + x^{-1} + x^1 + x^2 + x^3 + x^4$ este natural.

Soluție

1. $x^2 = 66$ 1p
 x este negativ deoarece $\sqrt{47 - \sqrt{2013}} < \sqrt{47 + \sqrt{2013}} \Rightarrow x = -\sqrt{66}$ 1p
 partea întreagă a lui x este -9 1p
2. prin ridicarea egalității la pătrat obținem $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$ 1p
- $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = 49 \Rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} = 47$ 1p
- $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 9 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = \pm 3$ și cum x este pozitiv $x + \frac{1}{x} = 3$ 1p
- $x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$, finalizare $a = 75$ este număr natural 1p

Subiectul II

- a) Fie a și b două numere reale pozitive. Arătați că $a\sqrt{a} + b\sqrt{b} \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$.
- b) Arătați că, pentru orice număr natural nenul n , are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{2\sqrt{2} + 1\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1} + n\sqrt{n}} < 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Soluție

- a) Relația din enunț este echivalentă cu $(a-b)(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \geq 0$ 1p
 $(a-b)(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ 1p
 finalizare 1p
- b) În relația de la a) egalitatea are loc dacă $a = b$.
 Pentru $a \neq b$ avem $a\sqrt{a} + b\sqrt{b} > a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$ 1p
- $\frac{1}{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}} < \frac{1}{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}$ și aplicarea ei pentru termenii sumei 1p
 finalizare 2p

Subiectul III

În tetraedrul oarecare $ABCD$, G_1 , G_2 și G_3 sunt centrele de greutate ale fețelor ABC , ABD și, respectiv, ACD .

a) Demonstrați că $(G_1G_2G_3) \parallel (BCD)$.

b) Aflați valoarea raportului ariilor triunghiurilor $\Delta G_1G_2G_3$ și ΔBCD .

Soluție:

a) Fie M mijlocul (AB) .

$G_1 \in (CM)$, $G_2 \in (DM)$ și $\frac{MG_1}{MC} = \frac{MG_2}{MD} = \frac{1}{3}$ 1p

din teorema reciprocă a teoremei lui Thales obținem $G_1G_2 \parallel CD$ 1p

$G_1G_2 \parallel (BCD)$, analog $G_2G_3 \parallel (BCD)$ 1p

$(G_1G_2G_3) \parallel (BCD)$ 1p

b) Din teorema fundamentală a asemănării obținem $\frac{G_1G_2}{CD} = \frac{1}{3}$ 1p

triunghiurile $\Delta G_1G_2G_3$ și ΔBCD sunt asemenea cu raportul de asemănare $\frac{1}{3}$ 1p

raportului ariilor triunghiurilor $\Delta G_1G_2G_3$ și ΔBCD este $\frac{1}{9}$ 1p

Subiectul IV

Fie $ABCD A'B'C'D'$ o prismă patrulateră dreaptă, cu bazele pătrate, în care $AA' = AB\sqrt{2}$ și M, N sunt, respectiv, mijloacele segmentelor $[BB']$, $[DD']$.

a) Arătați că $A'B \perp (AMD)$;

b) Arătați că dreapta de intersecție a planelor (AMD) și (ANB) este perpendiculară pe planul $(A'BD)$.

Soluție:

a) $AD \perp A'B$ 1p

Fie $A'B \cap AM = \{E\}$

$\Delta ABM \sim \Delta A'AB$ (LUL) $\Rightarrow \angle BAM \equiv \angle AA'B$ și cum $\angle A'BA$ și $\angle BA'A$ sunt complementare se obține $m(\angle AEB) = 90^\circ$, deci $AM \perp A'B$ 2p

$A'B \perp (AMD)$ 1p

b) Planele (AMD) și (ANB) au punctul A comun și sunt diferite, deci există dreapta d de intersecție a lor

$A'B \perp (AMD)$ și $d \subset (AMD)$, deci $A'B \perp d$ 1p

Analog cu demonstrația de la a) avem $A'D \perp (ANB)$ și deci $A'D \perp d$ 1p

Finalizare 1p