

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 16 februarie 2013**

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

CLASA a XII-a

1. Fie $U(\mathbb{Z}_{49}) = \{x \in \mathbb{Z}_{49} \mid x \text{ este simetrizabil în raport cu înmulțirea } \}$.

a) Arătați că $(U(\mathbb{Z}_{49}), \cdot)$ este grup cu 42 de elemente.

b) Determinați ordinul lui $\widehat{30}$ în grupul $(U(\mathbb{Z}_{49}), \cdot)$.

c) Să se găsească în $(U(\mathbb{Z}_{49}), \cdot)$ un element de ordin 42.

Mihai Piticari și Vladimir Cerbu, Câmpulung Moldovenesc

Soluție. a) $x \in \mathbb{Z}_{49}$, x inversabil $\Leftrightarrow (x, 49) = 1$. Cum $\varphi(49) = 7 \cdot 6 = 42 \Rightarrow U(\mathbb{Z}_{49})$ are 42 de elemente.

Deoarece (\mathbb{Z}_{49}, \cdot) este monoid $\Rightarrow (U(\mathbb{Z}_{49}), \cdot)$ este grup.

b) $\widehat{30}^2 = \widehat{18}$, $\widehat{30}^3 = \widehat{1} \Rightarrow \text{ord}(\widehat{30}) = 3$

c) $\forall x \in U(\mathbb{Z}_{49})$ avem $\text{ord } x \mid 42$. Conform teoremei lui Cauchy, există în G elemente de ordin 2, 3, respectiv 7. Avem $\text{ord}(\widehat{-1}) = 2 \Rightarrow \text{ord}(\widehat{48}) = 2$, iar $\text{ord}(\widehat{30}) = 3$.

$(7k+1)^7 = C_7^0 \cdot (7k)^7 + C_7^1 \cdot (7k)^6 + \dots + C_7^5 \cdot (7k)^2 + C_7^6 \cdot 7k + C_7^7 = M_{49} + 1 \Rightarrow \text{ord}(\widehat{8}) = 7$.

Atunci $\text{ord}(\widehat{48} \cdot \widehat{30} \cdot \widehat{8}) = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42 \Rightarrow \text{ord}(\widehat{5}) = 42$

Barem.

a) $x \in \mathbb{Z}_{49}$, x inversabil $\Leftrightarrow (x, 49) = 1$.	1 p
$U(\mathbb{Z}_{49})$ are 42 de elemente.	1 p
$U(\mathbb{Z}_{49})$ este grup	1p
b) $\widehat{30}^2 = \widehat{18}$, $\widehat{30}^3 = \widehat{1} \Rightarrow \text{ord}(\widehat{30}) = 3$	1 p
c) Găsește un element de ordin 42	3 p

2. Fie k un număr natural nenul și (G, \cdot) un grup cu n elemente. Să se arate că următoarele afirmații sunt echivalente:

i) Pentru orice subgrup H al grupului G avem $H = \{a^k \mid a \in H\}$.

ii) $(k, n) = 1$.

Gazeta Matematică, nr. 11/2012

Soluție. i) \Rightarrow ii) Presupunem prin absurd că există p prim, $p \mid (n, k)$. Cum $G \leq G$, avem $G = \{a^k \mid a \in G\}$,

deci funcția $f: G \rightarrow G$, $f(x) = x^k$ este surjectivă. Cum G este finit, rezultă că f este injectivă.

Fie $b \in G$ un element de ordin p . Deoarece $p \mid k$, avem $b^k = e$, deci $f(b) = b^k = e = f(e)$. Din injectivitate rezultă $b = e$, fals!

ii) \Rightarrow i) Fie H un subgrup al lui G . Cum $\{a^k \mid a \in H\} \subset H$ și H este finită, este suficient să arătăm că pentru $a, b \in H$ cu $a^k = b^k$ rezultă $a = b$. Deoarece $(k, n) = 1$, există $u, v \in \mathbb{Z}$ astfel ca $nu + kv = 1$. Atunci $a^k = b^k \Rightarrow a^{kv} = b^{kv} \Rightarrow a^{1-nu} = b^{1-nv} \Rightarrow a = b$, deoarece $a^n = b^n = e$.

Barem.

i) \Rightarrow ii) $f : G \rightarrow G, f(x) = x^k$ este injectivă	2 p
Presupunem prin absurd că există p prim, $p \mid (n, k)$. Există $b \in G$ un element de ordin p	1 p
$b^k = e \Rightarrow f(b) = f(e) \Rightarrow b = e$, absurd!	1p
ii) \Rightarrow i) Pentru $H \leq G, \{a^k \mid a \in H\} \subset H$	1 p
Deoarece $(k, n) = 1$, există $u, v \in \mathbb{Z}$ astfel ca $nu + kv = 1$.	1p
Finalizare	1p

3. a) Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Calculați $\int_{\frac{1}{n}}^n \frac{1}{x^2 + x + 1} dx$.

b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^n \frac{\arctg x}{x^2 + x + 1} dx$.

Soluție. a) $\int_{\frac{1}{n}}^n \frac{1}{x^2 + x + 1} dx = \int_{\frac{1}{n}}^n \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \Big|_{\frac{1}{n}}^n = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\arctg \frac{2n+1}{\sqrt{3}} - \arctg \frac{\frac{2}{n}+1}{\sqrt{3}} \right)$

b) Fie $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^n \frac{\arctg x}{x^2 + x + 1} dx$. Deoarece $\arctg x + \arctg \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, \forall x > 0$, avem:

$$I_n = \int_{\frac{1}{n}}^n \frac{\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{1}{x}}{x^2 + x + 1} dx = \frac{\pi}{2} \int_{\frac{1}{n}}^n \frac{1}{x^2 + x + 1} dx - \int_{\frac{1}{n}}^n \frac{\arctg \frac{1}{x}}{x^2 + x + 1} dx = \frac{\pi}{2} \int_{\frac{1}{n}}^n \frac{1}{x^2 + x + 1} dx + \int_{\frac{1}{n}}^n \frac{\arctg \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \cdot \frac{-1}{x^2} dx$$

Cu schimbarea de variabilă $t = \frac{1}{x}$ obținem $\int_{\frac{1}{n}}^n \frac{\arctg \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \cdot \frac{-1}{x^2} dx = \int_{\frac{1}{n}}^n \frac{\arctg t}{t^2 + t + 1} dt = -I_n$, deci

$$I_n = \frac{\pi}{2} \int_{\frac{1}{n}}^n \frac{1}{x^2 + x + 1} dx - I_n. \text{ Ținând cont de punctul a) rezultă că } I_n = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \left(\arctg \frac{2n+1}{\sqrt{3}} - \arctg \frac{\frac{2}{n}+1}{\sqrt{3}} \right).$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}.$$

Barem.

a) Calculul integralei	2p
b) Calculul lui I_n	4p
Calculează $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$	1p

4. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o primitivă a sa.

Dacă $f(x) \geq \arctg|x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$, demonstrați că există $x_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât $F(x_0) = x_0$.

Anca Andrei, Suceava

Soluție. Fie $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \arctg|x|$. O primitivă a sa este $G(x) = \begin{cases} x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2), & x \geq 0 \\ -x \arctg x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2), & x < 0 \end{cases}$.

Considerăm funcția $D: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $D(x) = F(x) - G(x)$ care este derivabilă pe \mathbb{R} și

$D'(x) = f(x) - g(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Prin urmare, funcția D este crescătoare.

Pentru $x < 0 \Rightarrow D(x) \leq D(0) \Rightarrow F(x) + x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \leq F(0) \Rightarrow$

$$F(x) - x \leq F(0) - x \arctg x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - x.$$

Deoarece $\lim_{x \rightarrow -\infty} (F(0) - x \arctg x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\frac{F(0)}{x} - \arctg x + \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln(1+x^2)}{x} - 1 \right) = -\infty$,

rezultă că $\lim_{x \rightarrow -\infty} (F(x) - x) = -\infty$. (1)

Pentru $x > 0 \Rightarrow D(x) \geq D(0) \Rightarrow F(x) - x \arctg x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \geq F(0) \Rightarrow$

$$F(x) - x \geq F(0) + x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - x.$$

Deoarece $\lim_{x \rightarrow \infty} (F(0) + x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{F(0)}{x} + \arctg x - \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln(1+x^2)}{x} - 1 \right) = +\infty$

rezultă că $\lim_{x \rightarrow \infty} (F(x) - x) = +\infty$. (2)

Din (1), (2) și din faptul că funcția $H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $H(x) = F(x) - x$, este continuă rezultă că $(\exists) x_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât $H(x_0) = 0 \Rightarrow F(x_0) = x_0$.

Barem.

Determină o primitivă a funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \arctg x $	2 p
$\lim_{x \rightarrow -\infty} (F(x) - x) = -\infty$	2 p
$\lim_{x \rightarrow \infty} (F(x) - x) = +\infty$	2 p
Finalizare	1 p

Notă:

Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

SUCEAVA

16 februarie 2013

CLASA a XII-a

1. Fie $U(\mathbb{Z}_{49}) = \{x \in \mathbb{Z}_{49} \mid x \text{ este simetrizabil în raport cu înmulțirea}\}$.
- Arătați că $(U(\mathbb{Z}_{49}), \cdot)$ este grup cu 42 de elemente.
 - Determinați ordinul lui $\widehat{30}$ în grupul $(U(\mathbb{Z}_{49}), \cdot)$.
 - Să se găsească în $(U(\mathbb{Z}_{49}), \cdot)$ un element de ordin 42.
2. Fie k un număr natural nenul și (G, \cdot) un grup cu n elemente. Să se arate că următoarele afirmații sunt echivalente:
- Pentru orice subgrup H al grupului G avem $H = \{a^k \mid a \in H\}$.
 - $(k, n) = 1$.
3. a) Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Calculați $\int_{\frac{1}{n}}^n \frac{1}{x^2 + x + 1} dx$.
- b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^n \frac{\arctg x}{x^2 + x + 1} dx$.
4. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o primitivă a sa. Dacă $f(x) \geq \arctg|x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$, demonstrați că există $x_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât $F(x_0) = x_0$.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.

2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.

3. Timp de lucru 3 ore.