Olimpiada Naţională de Matematică 2016

Etapa locală – Iaşi, 1 februarie 2016

CLASA A XI-A

Problema 1. Pentru fiecare număr natural n se consideră funcţia

$$f_n:(-1,1)\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^n}.$$

a) Să se arate că $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x)=-\frac{1}{4}$.

b) Să se arate că nu există $\lim\limits_{x\to 0} f_3(x)$.

c) Să se determine n pentru care există $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x)$.

Problema 2. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit astfel: $a_1=1$, $a_{n+1}=\frac{2a_n^2+1}{2a_n}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Să se arate că:

a) şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător;

b) $n\leq a_n^2<n+\sqrt{n}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$;

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}=1$.

Problema 3. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$. Să se demonstreze că, dacă $A^n=\begin{pmatrix}a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{pmatrix}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$, atunci $\frac{b_n}{2}=\frac{c_n}{3}=\frac{a_n-d_n}{4}$.

Problema 4. Fie n un număr natural mai mare sau egal cu 2. Se consideră două matrice $A,B\in M_n(\mathbb{R})$, astfel încât A să fie inversabilă şi $3AB=2BA+I_n$.

a) Să se determine matricea B, ştiind că $n=2$ şi $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

b) Să se demonstreze că $\det(I_n-AB)=\det(I_n-BA)$.

c) Să se arate că $\det(AB-BA)=0$.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică 2016

Etapa locală – Iași, 1 februarie 2016

CLASA A XI-A

Problema 1. Pentru fiecare număr natural n se consideră funcția

$$f_n:(-1,1)\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^n}.$$

a) Să se arate că $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x)=-\frac{1}{4}$.

b) Să se arate că nu există $\lim\limits_{x\to 0} f_3(x)$.

c) Să se determine n pentru care există $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x)$.

Soluție și barem.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}+\frac{\sqrt{1-x}-1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}-\frac{1}{x\left(\sqrt{1-x}+1\right)}\right)=$ **2p**

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2}{\left(\sqrt{1+x}+1\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)}=-\frac{1}{4}$. **1p**

b) Deoarece $\lim\limits_{x\nearrow 0} f_3(x)=\lim\limits_{x\nearrow 0}\frac{f_2(x)}{x}=+\infty$ și $\lim\limits_{x\searrow 0} f_3(x)=\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{f_2(x)}{x}=-\infty$, rezultă că nu există $\lim\limits_{x\to 0} f_3(x)$. ..**2p**

c) $\lim\limits_{x\to 0} f_0(x)=\lim\limits_{x\to 0} f_1(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x)=-\frac{1}{4}$. Pentru $n\geq 3$, avem $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f_2(x)}{x^{n-2}}$. Această limită este $-\infty$ dacă n este număr par și nu există dacă n este număr impar. Așadar limita $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x)$ există dacă și numai dacă n este număr par sau $n=1$. **2p**

Problema 2. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit astfel: $a_1=1$, $a_{n+1}=\frac{2a_n^2+1}{2a_n}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Să se arate că:

a) șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător;

b) $n\leq a_n^2<n+\sqrt{n}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$;

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}=1$.

Soluţie şi barem

a) Se arată, prin inducţie, că $a_n > 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. De aici rezultă că $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{2a_n} > 0$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, deci şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător. **3p**

b) $a_{n+1}^2 = a_n^2 + 1 + \dfrac{1}{4a_n^2} > a_n^2 + 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, de unde rezultă că $a_n^2 \geq n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ (inducţie)..**1p**

Se arată, tot prin inducţie, că $a_n^2 < n + \sqrt{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*$: $a_1^2 < 1 + \sqrt{1}$; din $a_k^2 < k + \sqrt{k}, k \in \mathbb{N}^*$ rezultă că $a_{k+1}^2 = a_k^2 + 1 + \dfrac{1}{4a_k^2} < k + \sqrt{k} + 1 + \dfrac{1}{4k} = k + 1 + \left(\sqrt{k} + \dfrac{1}{4k}\right) < k + 1 + \sqrt{k+1}$. **1p**

c) Din relaţia de la punctul b), se obţine $1 \leq \dfrac{a_n}{\sqrt{n}} < \sqrt{1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}}$, de unde rezultă că $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{n}} = 1$. **2p**

Problema 3. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Să se demonstreze că, dacă $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\dfrac{b_n}{2} = \dfrac{c_n}{3} = \dfrac{a_n - d_n}{4}$.

Soluţie şi barem

Evident, $A^n \cdot A = A \cdot A^n$, ...**3p**

deci $5a_n + 3b_n = 5a_n + 2c_n, 2a_n + b_n = 5b_n + 2d_n, 5c_n + 3d_n = 3a_n + c_n, 2c_n + d_n = 3b_n + d_n$,......................**2p**

de unde rezultă că $\dfrac{b_n}{2} = \dfrac{c_n}{3} = \dfrac{a_n - d_n}{4}$. **2p**

Problema 4. Fie n un număr natural mai mare sau egal cu 2. Se consideră două matrice $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, astfel încât A să fie inversabilă şi $3AB = 2BA + I_n$.

a) Să se determine matricea B, ştiind că $n = 2$ şi $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Să se demonstreze că $\det(I_n - AB) = \det(I_n - BA)$.

c) Să se arate că $\det(AB - BA) = 0$.

Soluţie şi barem

a) $B = A$. **3p**

b) $\det(I_n - AB) = \det(AA^{-1} - ABAA^{-1}) = \det(A(I_n - BA)A^{-1}) = \det(A)\det(I_n - BA)\det(A^{-1}) =$

$\det(AA^{-1})\det(I_n - BA) = \det(I_n - BA)$. **2p**

c) $3AB = 2BA + I_n \Rightarrow 3AB - 3BA = I_n - BA \Rightarrow 3^n \det(AB - BA) = \det(I_n - BA)$ (1)

$3AB = 2BA + I_n \Rightarrow 2AB - 2BA = I_n - AB \Rightarrow 2^n \det(AB - BA) = \det(I_n - AB)$ (2)

Din relaţiile (1) şi (2) rezultă că $3^n \det(AB - BA) = 2^n \det(AB - BA)$, deci $\det(AB - BA) = 0$. **2p**

Notă: Orice altă soluţie corectă sau demers de rezolvare corect se va puncta corespunzător.