OLIMPIADA DE MATEMATICĂ Bucuresti
– ETAPA PE SECTOR, 23.02.2014 -

CLASA A VII-A

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

1. Determinați toate perechile de numere naturale (a,b) care verifică egalitatea $a^2b^2-11a^2-11b^2=1893$.

2. Se consideră trapezul $ABCD$ ($AB \parallel CD$) în care $\{O\}=AC\cap BD$. Punctele M şi N sunt situate pe segmentele (AO) şi respectiv (BO), iar punctele P şi Q sunt situate pe segmentele (AD) şi respectiv (BC), astfel încât $MP \perp AD$, iar $NQ \perp BC$.

a) Demonstrați că $S_{OAD}=S_{OBC}$;

b) Demonstrați că $MN \parallel AB$ dacă şi numai dacă $\frac{AD}{BC}=\frac{NQ}{PM}$.

3. Se consideră numerele întregi nenule a, b şi c care verifică egalitatea $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

a) Arătați că $|a+b+c|\leq 3$;

b) Arătați că cel puțin unul dintre numerele a, b sau c are modulul egal cu 1.

4. Pe ipotenuza triunghiului dreptunghic ABC, $m\left(\widehat{BAC}\right)=90^\circ$, se consideră punctele D şi E astfel încât $BD=AB$ şi $CE=AC$. Punctele F şi G sunt situate pe laturile (AB), respectiv (AC) astfel încât $BF=BE$ şi $CG=CD$. Dacă I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC, demonstrați că punctele F, I şi G sunt coliniare.

Problema 1 a fost selectată din nr. 10/2013 al ***Gazetei Matematice***- Seria B, publicație lunară pentru tineret, fondată în anul 1895, editată de Societatea de Ştiințe Matematice din România

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 23.02.2014 -

CLASA A VII-A
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1. Determinați toate perechile de numere naturale (a,b) care verifică egalitatea

$$a^2b^2-11a^2-11b^2=1893.$$

Prof. Eugen Predoiu, Călăraşi

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Egalitatea din enunț este echivalentă cu $\left(a^2-11\right)\left(b^2-11\right)=2014=2\cdot 19\cdot 53$	**3p**
Deci $a^2-11\in\{1,2,19,53,38,106,1007,2014\}$	**2p**
Convin numai $a^2-11=38$ şi $b^2-11=53$ sau $b^2-11=38$ şi $a^2-11=53$, de unde obținem $(a,b)\in\{(7,8),(8,7)\}$.	**2p**

Subiectul 2. Se consideră trapezul $ABCD$ ($AB \parallel CD$) în care $\{O\}=AC\cap BD$. Punctele M şi N sunt situate pe segmentele (AO) şi respectiv (BO), iar punctele P şi Q sunt situate pe segmentele (AD) şi respectiv (BC), astfel încât $MP\perp AD$, iar $NQ\perp BC$.

a) Demonstrați că $S_{OAD}=S_{OBC}$;

b) Demonstrați că $MN\parallel AB$ dacă şi numai dacă $\dfrac{AD}{BC}=\dfrac{NQ}{PM}$.

Prof. Traian Preda, Bucureşti

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Avem $S_{DAB}=S_{CAB}$. Scădem din ambii membri ai egalității S_{AOB} şi obținem $S_{OAD}=S_{OBC}$.	**2p**
b) $MN\parallel AB$ este echivalent, conform *teoremei lui Thales*, cu $\dfrac{OM}{MA}=\dfrac{ON}{NB}$. Echivalent cu $\dfrac{S_{DMO}}{S_{DMA}}=\dfrac{S_{CNO}}{S_{CNB}}$.	**2p**
Echivalent cu $\dfrac{S_{DMO}+S_{DMA}}{S_{DMA}}=\dfrac{S_{CNO}+S_{CNB}}{S_{CNB}}$, adică $\dfrac{S_{DOA}}{S_{DMA}}=\dfrac{S_{COB}}{S_{CNB}}$. Echivalent cu $S_{DMA}=S_{CNB}$.	**2p**
Echivalent cu $\dfrac{AD\cdot MP}{2}=\dfrac{BC\cdot NQ}{2}$, echivalent cu $\dfrac{AD}{BC}=\dfrac{NQ}{PM}$	**1p**

Subiectul 3. Se consideră numerele întregi nenule a, b şi c care verifică egalitatea

$$a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

a) Arătaţi că $|a+b+c|\le 3$;

b) Arătaţi că cel puţin unul dintre numerele a, b sau c are modulul egal cu 1.

Prof. Lucian Petrescu, Tulcea, Cristian Mangra, Bucureşti

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Din ipoteză, rezultă $\lvert a+b+c\rvert=\left\lvert\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right\rvert\le\left\lvert\frac{1}{a}\right\rvert+\left\lvert\frac{1}{b}\right\rvert+\left\lvert\frac{1}{c}\right\rvert\le 1+1+1=3$. Egalitatea se obţine pentru $(a,b,c)\in\{(1,1,1),(-1,-1,-1)\}$	**2p**
b) Presupunem că $\lvert a\rvert\ge 2,\lvert b\rvert\ge 2,\lvert c\rvert\ge 2$, atunci $1\le\lvert a+b+c\rvert=\left\lvert\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right\rvert\le\left\lvert\frac{1}{a}\right\rvert+\left\lvert\frac{1}{b}\right\rvert+\left\lvert\frac{1}{c}\right\rvert\le\frac{3}{2}$ Obţinem $\lvert a+b+c\rvert=1$	**2p**
Dacă toate numerele a, b şi c sunt impare, atunci $1=\lvert a+b+c\rvert\le\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$, deci $\lvert a\rvert=\lvert b\rvert=\lvert c\rvert=3$. Cum $a+b+c$ este multiplu de 3, rezultă că $\lvert a+b+c\rvert\ne 1$	**1p**
Dacă, de exemplu numerele a şi b sunt pare şi c este impar, atunci $1=\left\lvert\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right\rvert=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}$, dar $2+3+6=11\ne 1$. Rezultă că, cel puţin unul dintre numerele a, b, c are modulul egal cu 1.	**1p**
Un triplet care verifică egalitatea din enunţ este, de exemplu $(a,b,c)=(1,2,-2)$	**1p**

Subiectul 4. Pe ipotenuza triunghiului dreptunghic ABC, $m\left(\widehat{BAC}\right)=90^\circ$, se consideră punctele D şi E astfel încât $BD=AB$ şi $CE=AC$. Punctele F şi G sunt situate pe laturile (AB), respectiv (AC) astfel încât $BF=BE$ şi $CG=CD$. Dacă I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC, demonstraţi că punctele F, I şi G sunt coliniare.

Prof. Gabriel Vrînceanu, Mircea Fianu, Bucureşti

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Deoarece triunghiul BFE este isoscel şi $(BI$ este bisectoarea unghiului $\widehat{EBF}$, rezultă că dreapta BI este mediatoarea segmentului $[EF]$(1). Cum triunghiul CAE este isoscel, iar $(CI$ este bisectoarea unghiului $\widehat{ACE}$, rezultă că dreapta CI este mediatoarea segmentului $[EA]$(2). Din (1) şi (2), rezultă că I este centrul cercului circumscris triunghiului AFE, deci I este situat pe mediatoarea segmentului $[FA]$(3).	**2p**
Analog, obţinem că I este centrul cercului circumscris triunghiului AGD, deci I este situat pe mediatoarea segmentului $[GA]$(4).	**2p**
Din (3) şi (4) deducem că I este centrul cercului circumscris triunghiului AGF.	**1p**
Cum triunghiul AFG este dreptunghic în A, rezultă că I este mijlocul ipotenuzei $[FG]$, deci punctele F, I şi G sunt coliniare.	**2p**