

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ-GIURGIU-22.02.2014

CLASA a XII-a

1) Pe mulțimea  $\mathbf{R}$ , considerăm legea de compoziție

$$x \circ y = xy - 2013x - 2013y + 2013 \cdot 2014, \forall x, y \in \mathbf{R}$$

- Să se arate că  $x \circ x \geq 2013, \forall x \in \mathbf{R}$
- Calculați  $x \circ x \circ x \circ \dots \circ x$ , unde  $x$  apare de  $n$  ori,  $n \in \mathbf{N}^*$
- Să se rezolve în  $\mathbf{R}$  ecuația  $x \circ x \circ x = 2014$ .

Monica Coadă, Giurgiu

2) Fie  $(M, \cdot)$  un monoid cu elementul neutru  $e$  și  $U(M)$  mulțimea elementelor inversabile ale lui  $M$ .

Se consideră  $a, b \in M$  astfel încât  $a^2 = e$  și  $(ab)^2 = b^4, b \in U(M)$ .

- Determinați cel mai mic număr  $k \in \mathbf{N}^*$ , astfel încât  $b^k = e$ .
- Calculați  $b^{2014}$ .

George Ionescu, Bolintin Vale

3) Să se calculeze :

$$\int \frac{x^{10069} + x^{2013}}{x^{12084} + 1} dx, x \in \mathbf{R}.$$

Paul Băiatu, Giurgiu

4) Fie funcția  $f: [1, e] \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{2}{x^2+x} \cdot \ln \frac{x}{x+1}$  și  $F$  o primitivă a lui  $f$  astfel încât  $F(1) = \ln^2 2$ . Dacă  $G$  este o primitivă a primitivei lui  $f$ , arătați că

$$\int_1^e G(x) dx \geq \int_1^e x F(x) dx.$$

Stelian Piscan, Giurgiu