Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Locală - 22 februarie 2014 - Maramureş

Clasa a X-a

1. a. Să se arate că funcţia $f : R \to R,\ f(x) = 3^x + 2^x + x$ este injectivă.

b. Să se rezolve ecuaţia $3^{\log_2 x} + \log_2 x = 2^{\log_3 x} + \log_3 x$.

Ludovic Longaver

2. a. Să se arate că $\dfrac{x}{y+z} + \dfrac{y}{z+x} + \dfrac{z}{x+y} \geq \dfrac{3}{2}$, $\forall x, y, z > 0$.

b. Să se rezolve în N^* ecuaţia: $\sqrt[x^2+x]{4} + \sqrt[1+x]{4^{x^2}} + \sqrt[x^2+1]{4^x} = 6$.

Meda Bojor

3. Se consideră numerele complexe $a, b \in C$ având $|a| = |b| = 1$ şi mulţimea $A = \{z \in C \,\|\, z - a| = |z - b|\}$

a. Să se demonstreze că $A \neq \varnothing$.

b. Dacă $z \in A$ să se demonstreze că $z = \overline{z} \cdot a \cdot b$.

c. Dacă $z_1, z_2 \in A$ să se demonstreze că $z_1 + z_2 \in A$.

Florin Bojor

4. Să se determine funcţiile $f : N \to N$ cu proprietatea

$$f\left(f\left(n+1\right)\right) = f\left(f\left(n\right)+1\right) = n + 2009, \forall n \in N .$$

Timp de lucru 3 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Subiecte selectate şi prelucrate de:

prof. Bojor Meda, Colegiul Naţional „Gheorghe Șincai”, Baia Mare.

prof. Longaver Ludovic, Liceul Teoretic „Nemeth Laszlo”, Baia Mare.

prof. Bojor Florin, Colegiul Naţional „Gheorghe Șincai”, Baia Mare.